Colle 2

Question de cours :

Énoncer les formules de factorisation. ($\cos(a) + \cos(b)$ et $\sin(a) + \sin(b)$)

Exercice classique :

Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ? Démontrer votre réponse.

1. $\forall x \geq 0,\ \exists y \geq 0,\ y^2 = x$
2. $\exists y \geq 0,\ \forall x \geq 0,\ y^2 = x$
3. $\exists y \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ xy = x$
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \exists z \in \mathbb{R},\ x = y + z$
5. $\forall N \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N},\ m \leq N.$

Exercice 1 :

On souhaite démontrer la propriété suivante : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, si l'entier $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair.

1. Énoncer la contraposée de la propriété précédente.
2. Montrer qu'un entier impair n s'écrit sous la forme $n = 4k + r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{1, 3\}$.
3. Démontrer alors la propriété.

Exercice 2 :

Soit P et Q deux assertions. Montrer que "non(P$\Rightarrow$ Q) $\Leftrightarrow$ (P et non(Q))" est un théorème.

Exercice 3 :

Démontrer par récurrence forte que tout entier $n \geq 1$ peut s'écrire comme somme de puissances de 2 toutes distinctes.

Question de cours :

Énoncer les lois de MORGAN.

Exercice classique :

On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
Prouver que :

$$\forall n \geq 0\,,\ u_n = 2^n + 3^n$$

Exercice 1 :

Démontrer le principe des tiroirs à chaussettes : si vous rangez $(n + 1)$ paires de chaussettes dans n tiroirs distincts, alors il y a au moins un tiroir contenant au moins 2 paires de chaussettes.

Exercice 2 :

Déterminer, en utilisant un raisonnement par analyse-synthèse, toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x - f(y)) = 2 - x - y.$

Exercice 3 :

Soient P et Q deux assertions, montrer le théorème suivant : "(non P $\Rightarrow$ Q) et (non P $\Rightarrow$ non Q)" $\Rightarrow$ "P"

Question de cours :

Donner la définition d'une relation d'équivalence.

Exercice classique :

Démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 1 :

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
Montre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 1$.

Exercice 2 :

Soient P et Q deux assertions, montrer le théorème suivant : "(non(P et non Q)) et (non(Q et non P))" $\Leftrightarrow$ "P $\Leftrightarrow$ Q".

Exercice 3 :

Déterminer, en utilisant un raisonnement par analyse-synthèse, toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x) \times f(y) - f(xy) = x + y$.

Exercice :

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. On considère la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}$ définie par $x\mathcal{R}y$ si $f(x) = f(y)$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. On considère $f(x) = x^3 + 5x^2 - 41x - 45$. Donner la classe de -1.