Colle 1

Question de cours :

Donner la définition d'une relation d'équivalence.

Exercice classique :

On donne $\cos(\frac{\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

1. Déterminer le signe $\sin(\frac{\pi}{5})$ et calculer la valeur exacte de $\sin(\frac{\pi}{5})$.
2. En déduire les valeurs exactes du cosinus et du sinus de : $\frac{4\pi}{5}$.
3. Exprimer $\cos(2\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ puis en déduire $\cos^2(\frac{\theta}{2})$ en fonction de $\cos(\theta)$.
4. Déterminer $\cos(\frac{\pi}{10})$ et $\cos(\frac{3\pi}{10})$.

Exercice 1 :

Résoudre l'inéquation $\frac{1}{1-x} \geq \sqrt{2+x}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 :

Résoudre $2\cos^2(x) - 3\cos(x) + 1 = 0$ sur $\mathbb{R}$ puis sur $I = [0; 2\pi]$.

Exercice 3 :

Sur $\mathbb{N}^*$, on considère la relation $\mathcal{R}$: $p\mathcal{R}q$ si $\exists k \in \mathbb{N}^*$, $q = p^k$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre. Est-elle totale ?
2. Peut on trouver un entier n tel que $2\mathcal{R}n$ et $3\mathcal{R}n$?

Question de cours :

Donner la définition et le graphe de la fonction partie entière.

Exercice classique :

Résoudre les inéquations suivantes :

$$(I_1)\ \sqrt{x+1} \leq x - 3 \qquad (I_2)\ \sqrt{x^2-8} > 2x - 5$$

Exercice 1 :

Résoudre $\sin(x) = \tan(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis sur $I =]-\pi; \pi]$.

Exercice 2 :

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\sin(x) \leq x$ et $\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.

Exercice 3 :

On considère la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}^2$ définie par $(x; y)\mathcal{R}(s; t)$ si $x^2 + y^2 = s^2 + t^2$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Décrire d'un point de vue géométrique la classe de $(0; 1)$.

Question de cours :

Énoncer une formule de factorisation.

Exercice classique :
Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor$

Exercice 1 :
Résoudre $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}$ puis sur $I = [0; 4\pi]$.

Exercice 2 :
Résoudre l'inéquation $|5 - x| \leq 3x + 1$.

Exercice 3 :
Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. On considère la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}$ définie par $x\mathcal{R}y$ si $f(x) = f(y)$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. On considère $f(x) = x^3 + 5x^2 - 41x - 45$. Donner la classe de -1.

Bonus : Soit $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, montrer que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$