EXERCICES CLASSIQUES : MPSI DESSAIGNES

Richard Eon, Mathématiques

2020/2021

Exercice 1 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$(I_1)\ \frac{5-3x}{1-x^2} \leq 0 \qquad (I_2)\ \frac{1-3x}{1-x} \geq 2 \qquad (I_3)\ \frac{x+5}{x-1} < \frac{x-3}{x+2}$$

Correction :

(I_1) Pour le domaine de définition, on résout $1-x^2=0$ donc le domaine est $\boxed{\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}.}$ On réalise le tableau de signe du quotient :

x	$-\infty$		-1		1		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$5-3x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
Quotient		$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Donc $\boxed{S=\left]-\infty;-1\right[\cup\left]1;\frac{5}{3}\right].}$

(I_2) Le domaine de définition est $\boxed{\mathbb{R}\setminus\{1\}.}$ $\frac{1-3x}{1-x}\geq 2$ ssi $\frac{1-3x}{1-x}-2\geq 0$ ssi $\frac{-1-x}{1-x}\geq 0$. On réalise le tableau de signe du quotient :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$-1-x$		$+$	0	$-$		$-$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
Quotient		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Donc $\boxed{S=]-\infty;-1]\cup]1;+\infty[.}$

(I_3) Le domaine de définition est $\boxed{\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}.}$ $\frac{x+5}{x-1}<\frac{x-3}{x+2}$ ssi $\frac{x+5}{x-1}-\frac{x-3}{x+2}>0$ ssi $\frac{(x+5)(x+2)-(x-3)(x-1)}{(x-1)(x+2)}<0$ ssi $\frac{11x+7}{(x-1)(x+2)}<0$. On réalise le tableau de signe du quotient :

x	$-\infty$		-2		$-\frac{7}{11}$		1		$+\infty$
$11x+7$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Quotient		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Donc $\boxed{S=\left]-\infty;-2\right[\cup\left]-\frac{7}{11};1\right[.}$

Exercice 2 :

Résoudre les inéquations suivantes :

$$(I_1)\ \sqrt{x+1} \leq x-3 \qquad (I_2)\ \sqrt{x^2-8} > 2x-5$$

Correction :

(I_1) Le domaine de définition est $\boxed{[-1;+\infty[}$ mais remarquons que pour $x<3$, $x-3<0$ et donc l'inéquation ne peut avoir de solution donc on l'étudie sur $[3;+\infty[$. Par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$, pour $x \geq 3$, $\sqrt{x+1} \leq x-3$ ssi $x+1 \leq (x-3)^2$ ssi $x^2-7x+8 \geq 0$. C'est un polynôme du 2nd degré et $\Delta = 17 > 0$. Il y a 2 racines, $\frac{7-\sqrt{17}}{2} < 2$ et $\frac{7+\sqrt{17}}{2} > 5$ donc $\boxed{S = \left[\frac{7+\sqrt{17}}{2};+\infty\right[.}$

(I_2) Le domaine de définition est $\boxed{]-\infty;-\sqrt{8}] \cup [\sqrt{8};+\infty[}$ et remarquons que si $2x-5<0$, c'est à dire $\boxed{x<\frac{5}{2}}$, alors x est forcement solution car une racine est positive. Il reste à étudier cette inéquation sur $[\sqrt{8};+\infty[$, on a $\sqrt{x^2-8} > 2x-5$ ssi $x^2-8 > (2x-5)^2$ ssi $3x^2-20x+33<0$. C'est un polynôme du 2nd degré avec $\Delta = 4 > 0$ donc il y a 2 racines $\frac{20-2}{6} = 3$ et $\frac{20+2}{6} = \frac{11}{3}$. Donc finalement, $\boxed{S =]-\infty;-\sqrt{8}] \cup]3;\frac{11}{3}[.}$

Exercice 3 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

$$(I_1)\ 2 < |x+1| < 3 \qquad (I_2)\ \frac{1}{2} \leq |x-3| < 4 \qquad (I_3)\ \begin{cases} |x-3| > 2 \\ |x+4| \leq 3 \end{cases}$$

Correction :

(I_1) La distance entre x et -1 doit être strictement entre 2 et 3 donc $\boxed{S =]-4;-3[\cup]1;2[.}$

(I_2) La distance entre x et 3 doit être strictement entre $\frac{1}{2}$ et 4 donc $\boxed{S =]-1;\frac{5}{2}] \cup [\frac{7}{2};7[.}$

(I_3) La distance entre x et 3 doit être strictement supérieur à 2 donc $x \in]-\infty;1[\cup]5;+\infty[$ et la distance entre x et -4 doit être inférieur à 3 donc $x \in [-7;-1]$ donc finalement $\boxed{S = [-7;-1].}$

Exercice 4 :

Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor$

Correction :

On sait que $\lfloor x \rfloor \leq x$ et $\lfloor y \rfloor \leq y$ donc $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x+y$. Comme $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ est un entier et que $\lfloor x+y \rfloor$ est le plus grand entier inférieur à $x+y$ alors $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor$. Notons que, par récurrence, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n\lfloor x \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor$.

Exercice 5 :

Calculer la valeur exacte de chacun des nombres réels suivants :

1. $\cos(\frac{-7\pi}{6})$; $\cos(\frac{-8\pi}{6})$; $\cos(\frac{-25\pi}{6})$; $\cos(\frac{127\pi}{4})$.
2. $\sin(\frac{-111\pi}{3})$; $\sin(\frac{277\pi}{4})$; $\sin(\frac{-31\pi}{6})$; $\sin(\frac{-5\pi}{3})$.

Correction :

1. $\cos(\frac{-7\pi}{6}) = \cos(\frac{5\pi}{6}) = -\cos(\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos(\frac{-8\pi}{6}) = \cos(\frac{-4\pi}{3}) = \cos(\frac{2\pi}{3}) = -\cos(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$; $\cos(\frac{-25\pi}{6}) = \cos(\frac{-\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos(\frac{127\pi}{4}) = \cos(\frac{-\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
2. $\sin(\frac{-111\pi}{3}) = \sin(-37\pi) = \sin(\pi) = 0$; $\sin(\frac{277\pi}{4}) = \sin(\frac{-3\pi}{4}) = -\sin(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin(\frac{-31\pi}{6}) = \sin(\frac{5\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$; $\sin(\frac{-5\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 6 :

On donne $\cos(\frac{\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

1. Déterminer le signe $\sin(\frac{\pi}{5})$ et calculer la valeur exacte de $\sin(\frac{\pi}{5})$.
2. En déduire les valeurs exactes du cosinus et du sinus de : $\frac{4\pi}{5}$.
3. Exprimer $\cos(2\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ puis en déduire $\cos^2(\frac{\theta}{2})$ en fonction de $\cos(\theta)$.
4. Déterminer $\cos(\frac{\pi}{10})$ et $\cos(\frac{3\pi}{10})$.

Correction :

1. Comme $\frac{\pi}{5} \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $\sin(\frac{\pi}{5}) \geq 0$ donc $\sin(\frac{\pi}{5}) = \sqrt{1-\cos^2(\frac{\pi}{5})} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.
2. $\cos(\frac{4\pi}{5}) = -\cos(\frac{\pi}{5}) = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ et $\sin(\frac{4\pi}{5}) = \sin(\frac{\pi}{5}) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.
3. $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$ donc en remplaçant θ par $\frac{\theta}{2}$, on obtient $\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1+\cos(\theta)}{2}$.
4. Comme $\frac{\pi}{10} \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $\cos(\frac{\pi}{10}) \geq 0$ donc $\cos(\frac{\pi}{10}) = \sqrt{\frac{1+\cos(\frac{\pi}{5})}{2}} = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$ et $\cos(\frac{3\pi}{10}) = \cos(\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{5}+1}{4} - \sqrt{1-\frac{5+\sqrt{5}}{8}} \times \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}(\sqrt{5}+1)-\sqrt{3-\sqrt{5}}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{40+16\sqrt{5}}-\sqrt{40-16\sqrt{5}}}{8\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}-\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{4}$

Exercice 7 :

À l'aide du cercle trigonométrique ou du graphe d'une fonction, résoudre l'inéquation sur l'intervalle I donné :

1. $\cos^2(x) \leq \frac{1}{2}$ sur $I = [-\pi; \pi]$.
2. $\cos^2(x) \geq \cos(2x)$ sur $I = [0; 2\pi]$.
3. $\sqrt{3}\tan(x) - 1 \leq 0$ sur $I = [-\pi; \pi]$.

Correction :

1. $\cos^2(x) \leq \frac{1}{2}$ ssi $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\boxed{S = [-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}] \cup [\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}]}$.
2. $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ donc $\cos^2(x) \geq \cos(2x)$ ssi $\sin^2(x) \leq 0$ donc $\boxed{S = [0; 2\pi]}$.
3. $\sqrt{3}\tan(x) - 1 \leq 0$ ssi $\tan(x) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ donc $\boxed{S = [-\pi; -\frac{5\pi}{6}]\cup] - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}]\cup]\frac{\pi}{2}; \pi]}$.

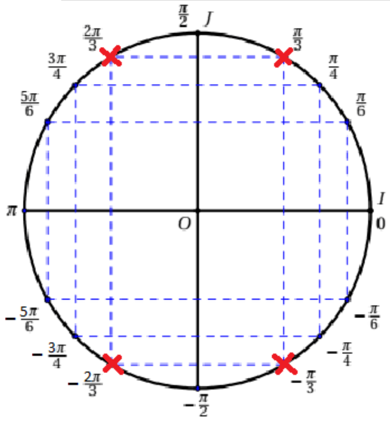
Exercice 8 :

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes et représenter l'ensemble des solutions sur le cercle trigonométriques.

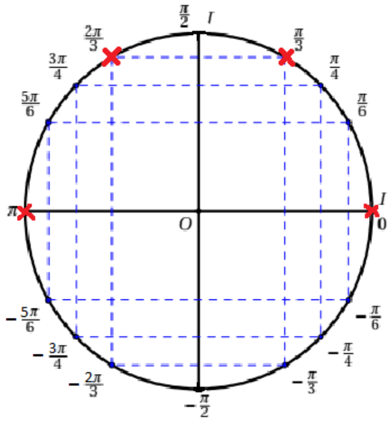
1. $4\cos(x)^2 = 1$; $4\sin(x)^3 + 4\sqrt{3}\sin(x)^2 = 9\sin(x)$;
2. $\cos(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$; $\sin(3x) = \cos(x)$;

<u>**Correction**</u> :

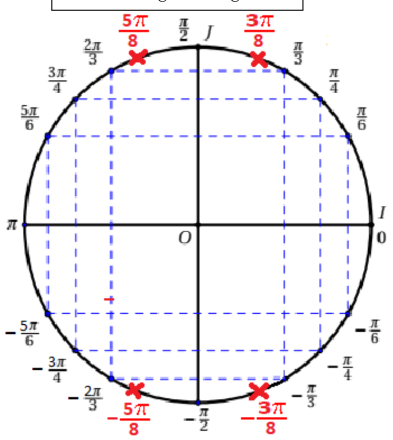
1. $4\cos(x)^2 = 1$ ssi $\cos(x)^2 = \frac{1}{4}$ ssi $\cos(x) = \pm\frac{1}{2}$
   donc $\boxed{S = \{-\frac{2\pi}{3}[2\pi]; -\frac{\pi}{3}[2\pi]; \frac{\pi}{3}[2\pi]; \frac{2\pi}{3}[2\pi]\}}$.



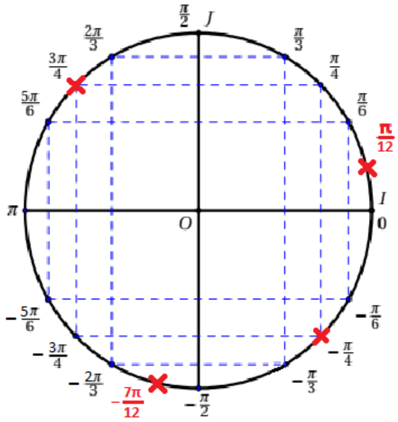
$4\sin(x)^3 + 4\sqrt{3}\sin(x)^2 = 9\sin(x)$
ssi $\sin(x)\left(4\sin(x)^2 + 4\sqrt{3}\sin(x) - 9\right) = 0$
ssi $\sin(x) = 0$ ou $4X^2 + 4\sqrt{3}X - 9 = 0$ avec $X = \sin(x)$.
Donc $x = 0[\pi]$ ou $\Delta = 192$, $X_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $X_2 = \frac{-3\sqrt{3}}{2}$.
Comme $\sin(x) \in [-1; 1]$, on obtient finalement,
$\boxed{S = \{0[\pi]; \frac{\pi}{3}[2\pi]; \frac{2\pi}{3}[2\pi]\}}$.



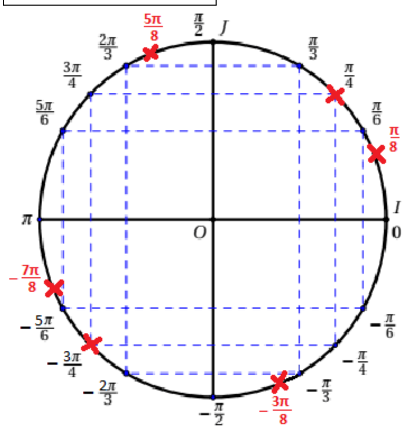
2. $\cos(2x) = -\frac{-\sqrt{2}}{2}$ ssi $2x = \pm\frac{3\pi}{4}[2\pi]$
   ssi $x = \pm\frac{3\pi}{8}[\pi]$
   donc $\boxed{S = \{-\frac{3\pi}{8}[\pi]; \frac{3\pi}{8}[\pi]\}}$.



$\sin(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$ ssi
$x = 2x + \frac{\pi}{4}[2\pi]$
ou $x = \frac{\pi}{2} - (2x + \frac{\pi}{4})[2\pi]$.
Donc $x = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$ ou $x = \frac{\pi}{12}[\frac{2\pi}{3}]$.
$\boxed{S = \{-\frac{\pi}{4}[2\pi]; \frac{\pi}{12}[\frac{2\pi}{3}]\}}$.



$\sin(3x) = \cos(x)$ ssi
$\cos(\frac{\pi}{2} - 3x) = \cos(x)$ ssi
$\frac{\pi}{2} - 3x = \pm x[2\pi]$.
Donc $x = \frac{\pi}{4}[\pi]$ ou $x = \frac{\pi}{8}[\frac{\pi}{2}]$.
$\boxed{S = \{\frac{\pi}{4}[\pi]; \frac{\pi}{8}[\frac{\pi}{2}]\}}$.



Exercice 9 :

Écrire avec des quantificateurs ou des implications les assertions suivantes .

1. f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction f s'annule sur l'intervalle I.
3. Le graphe de f coupe la droite d'équation $y = x$.
4. La fonction f atteint son maximum sur l'intervalle I.
5. f s'annule uniquement en 0.
6. La fonction f ne prend pas deux fois la même valeur.
7. f n'est pas positive.
8. Tout réel positif possède une racine carrée dans $[0; +\infty[$.
9. Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers.
10. Le nombre 3 n'est le sinus d'aucun nombre.
11. Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.
12. Il existe un entier multiple de tous les autres.

Correction :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$.
2. $\exists x \in I,\ f(x) = 0$.
3. $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$
4. $\exists x \in I,\ \forall y \in I,\ f(y) \leq f(x)$.
5. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.
6. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
7. $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) < 0$.
8. $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \exists y \in \mathbb{R}^+,\ y^2 = x$.
9. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall (p, q) \in \mathbb{Z}^2,\ x \neq \frac{p}{q}$.
10. $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x) \neq 3$.
11. $\forall n \in \mathbb{Z},\ \exists m \in \mathbb{Z},\ n < m$.
12. $\exists n \in \mathbb{Z},\ \forall m \in \mathbb{Z},\ m | n$.

Exercice 10 :

Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ? Démontrer votre réponse.

1. $\forall x \geq 0,\ \exists y \geq 0,\ y^2 = x$
2. $\exists y \geq 0,\ \forall x \geq 0,\ y^2 = x$
3. $\exists y \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ xy = x$
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \exists z \in \mathbb{R},\ x = y + z$
5. $\forall N \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N},\ m \leq N$.

Correction :

1. VRAI, il suffit de prendre $y = \sqrt{x}$.
2. FAUX, si $x_1 \neq x_2$, on ne peut avoir $y^2 = x_1$ et $y^2 = x_2$.
3. VRAI, $y = 1$ marche.
4. VRAI, il suffit de prendre $z = x - y$.
5. VRAI, il suffit de prendre $m = N$.

Exercice 11 :

On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
Prouver que :

$$\forall n \geq 0\,,\; u_n = 2^n + 3^n$$

Correction :

On le preuve par récurrence double sur n :
Initialisation : $u_0 = 2 = 2^0 + 3^0$ et $u_1 = 5 = 2 + 3$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 2^n + 3^n$ et $u_{n+1} = 2^{n+1} + 3^{n+1}$. Montrons le pour $n + 2$.
$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n = 5(2^{n+1}+3^{n+1}) - 6(2^n+3^n) = 10\times 2^n + 15\times 3^n - 6\times 2^n - 6\times 3^n = 4\times 2^n + 9\times 3^n = 2^{n+2}+3^{n+2}$.

Conclusion : $\forall n \geq 0\,,\; u_n = 2^n + 3^n$

Exercice 12 :

1. Démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.
2. Démontrer que $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est un nombre irrationnel.

Correction :

1. On résonne par l'absurde : supposons qu'il existe $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ et p, q premiers entre eux. Alors $p^2 = 2q^2$. Donc p^2 est pair ce qui implique que p est pair donc $p = 2p'$. En injectant dans l'équation précédente, on obtient $q^2 = 2p'^2$ donc q^2 puis q est pair ce qui contredit p et q premiers entre eux.
2. On résonne par l'absurde : supposons qu'il existe $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $\frac{\ln(2)}{\ln(3)} = \frac{p}{q}$, on a alors $2^q = 3^p$ ce qui n'est pas possible (le premier est divisible par 2 mais pas le deuxième).

Exercice 13 :

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes puis étudier leur dérivabilité. On pourra calculer ensuite la dérivée.

$$f_1 : x \longmapsto \sqrt{x^3 - x^4} \qquad f_2 : x \longmapsto \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \qquad f_3 : x \longmapsto (x^2-1)^{\sqrt{x}}$$

Correction :

f_1 : $x^3 - x^4 = x^3(1-x)$ donc $x^3 - x^4 \geq 0$ ssi $x \in [0; 1]$. Donc f_1 est définie sur $[0; 1]$, dérivable sur $]0; 1[$ et $\forall x \in]0; 1[$, $f_1'(x) = \frac{3x^2-4x^3}{2\sqrt{x^3-x^4}} = \frac{3-4x}{2\sqrt{\frac{1}{x}-1}}$.

f_2 : $x \to \frac{x-1}{x+1}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et positive sur $]-\infty; -1[\cup[1; +\infty[$ donc f_2 est définie sur $]-\infty; -1[\cup[1; +\infty[$ et dérivable sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.
$\forall x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, $f_2'(x) = \frac{\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} = \frac{1}{(x+1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{x-1}} = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$.

f_3 :
- Pour les valeurs entières, on obtient directement que f_3 est définie sur $\mathbb{N}$.
- Pour le reste, $(x^2-1)^{\sqrt{x}} = \exp(\sqrt{x}\ln(x^2-1))$ donc le domaine de définition de f_3 est $]1; +\infty[$.

Au final, $D_{f_3} = \{0\} \cup [1; +\infty[$.
- Par théorème opératoire, f_3 est dérivable sur $]1; +\infty[$ et
  $\forall x > 1$, $f_3'(x) = \left(\frac{\ln(x^2-1)}{2\sqrt{x}} + \frac{2x\sqrt{x}}{x^2-1}\right)\exp(\sqrt{x}\ln(x^2-1))$.
- En 1 : $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{f_3(x)-f_3(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} (x+1)^{\sqrt{x}}(x-1)^{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} (x+1)^{\sqrt{x}} e^{(\sqrt{x}-1)(\ln(\sqrt{x}-1)+\ln(\sqrt{x}+1))} = 2$

Donc f_3 est dérivable sur $[1; +\infty[$.

Exercice 14 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\exp(x)}{1+\exp(x)}$.

1. Dresser le tableau de variations complet de f.
2. Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$.
3. Étudier la convexité et les éventuels points d'inflexion de f.
4. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I que l'on précisera.
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, il existe un unique $u_n \in \mathbb{R}$ tel que $f(u_n) = \frac{1}{n}$.
6. Etudier la dérivabilité de la réciproque de f.
7. Expliciter la réciproque de f.

Correction :

1. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par théorème opératoire et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et, en factorisant, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	0 $\nearrow$	$\frac{1}{2}$ $\nearrow$	1

2. f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ par théorème opératoire donc f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \frac{e^x(1+e^x)^2 - e^x \times 2e^x(1+e^x)}{(1+e^x)^4} = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$.
3. On voit tout de suite que $f''(x) > 0$ pour $x < 0$ et $f''(x) < 0$ pour $x > 0$ donc f est convexe sur $]-\infty; 0]$ et concave sur $[0; +\infty[$ et 0 est un point d'inflexion.
4. f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc, par le théorème de la bijection, f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0; 1[$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, $\frac{1}{n} \in]0;1[$ donc, par la question précédente, il existe un unique $u_n \in \mathbb{R}$ tel que $f(u_n) = \frac{1}{n}$.
6. f est une bijection, dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \neq 0$ donc f^{-1} est dérivable sur $]0; 1[$ et, pour tout $x \in]0; 1[$, $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{x(1-x)}$.
7. En primitivant l'expression précédente ou en résolvant directement $f(x) = y$, on obtient $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$.

Exercice 15 :

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+1} + x; \qquad \lim_{x\to1} \frac{\sqrt{2x+7}-3}{x-1}$$

Correction :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+1} + x = \lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+x+1} + x) \times \frac{\sqrt{x^2+x+1}-x}{\sqrt{x^2+x+1}-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}$
$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = -\frac{1}{2}$
2. Posons $f(x) = \sqrt{2x+7}$, on a $\lim\limits_{x\to1} \frac{\sqrt{2x+7}-3}{x-1} = \lim\limits_{x\to1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = \frac{1}{3}$

Exercice 16 :

Résoudre les équations suivantes après avoir déterminer leur domaine de validité :

$$(E_1)\ \ln(\sqrt{2x-3}) = \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln(x) \qquad (E_2)\ e^x - 3e^{-x} - 4 = 0$$

$$(E_3)\ x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x \qquad (E_4)\ 2^{x^3} - 3^{x^2} = 0$$

Correction :

(E_1) : Le domaine de validité est clairement $]\frac{3}{2};6[$. Sur ce domaine, l'équation est équivalente à $\sqrt{2x^2-3x} = (6-x)$ donc $x^2+9x-36=0$. Finalement $\boxed{S=\{3\}}$.

(E_2) : Le domaine de validité est clairement $\mathbb{R}$. En multipliant par e^x et en posant $X = e^x$, on a $X^2-4X-3=0$ donc $X = 2\pm\sqrt{7}$. Comme $e^x > 0$, on obtient $\boxed{S=\{\ln(2+\sqrt{7})\}}$.

(E_3) : Cette équation se réécrit $e^{\sqrt{x}\ln(x)} = e^{x\ln(\sqrt{x})}$. Le domaine de validité est donc $]0;+\infty[$. Cette équation est équivalente à $\sqrt{x}\ln(x) = \frac{x}{2}\ln(x)$. $x=1$ est clairement solution, sinon on peut simplifier par $\ln(x)$ et on obtient $\sqrt{x} = \frac{x}{2}$ donc $x=4$. Donc $\boxed{S=\{1;4\}}$.

(E_4) : Le domaine de validité est clairement $\mathbb{R}$. L'équation est équivalente à $x^3\ln(2) = x^2\ln(3)$. $x=0$ est clairement solution, sinon on peut simplifier par x^2 et on obtient $x = \frac{\ln(3)}{\ln(2)}$. Donc $\boxed{S=\{0;\frac{\ln(3)}{\ln(2)}\}}$.

Exercice 17 :

Résoudre les inéquations suivantes après avoir déterminer leur domaine de validité :

$$(I_1)\ \ln(x^2-2x) > \ln(4x-5) \qquad (I_2)\ e^{x^2} > (e^x)^4 \qquad (I_3)\ a^{x^2} < (\sqrt{a})^{7x-3}\ \ a\in]0;1[\cup]1;+\infty[$$

Correction :

(I_1) : Le premier terme est définie pour $x\in]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$ alors que le 2ème est définie pour $x > \frac{5}{4}$ donc le domaine de validité est $]2;+\infty[$. Sur ce domaine, l'équation est équivalente à $x^2-2x > 4x-5$ soit $x^2-6x+5>0$ donc $\boxed{S=]5;+\infty[}$.

(I_2) : Le domaine de validité est clairement $\mathbb{R}$. En passant au logarithme, cette équation est équivalente à $x^2 > 4x$ donc $\boxed{S=]-\infty;0[\cup]4;+\infty[}$.

(I_3) : Le domaine de validité de cette équation est clairement $\mathbb{R}$. En passant au logarithme, l'équation est équivalente à $x^2\ln(a) < \frac{7x-3}{2}\ln(a)$.

1. Si $a>1$, $\ln(a)>0$ donc l'équation est équivalente à $2x^2-7x+3<0$ soit $\boxed{S=]\frac{1}{2};3[}$.
2. Si $a\in]0;1[$, on obtient alors $\boxed{S=]-\infty;\frac{1}{2}[\cup]3;+\infty[}$.

Exercice 18 :

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}, \qquad \lim_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}}, \qquad \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+2}{e^x+1}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^x}{3^x}$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^2e^{-x}-x, \qquad \lim_{x\to 0^+} x^x, \qquad \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln(\frac{x^2}{1+x}), \qquad \lim_{x\to+\infty} (1+\frac{1}{x})^x, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^x}{3^x}$$

<u>Correction</u> :

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x}} = 1$ par croissance comparée.
$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\sqrt{x}\ln(x)} = 1$ par croissance comparée.
$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(x)}{x}} = 0$ par quotient.
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x+2}{e^x+1} = 1$ par factorisation par e^x.
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{xe^x}{3^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{e}{3}\right)^x = 0$ par croissance comparée.
$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{-x}-x = +\infty$ par somme et produit.
$\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln(x)} = 1$ par croissance comparée.
$\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln(\frac{x^2}{1+x}) = \lim\limits_{x\to 0^+} 2\sqrt{x}\ln(x) - \sqrt{x}\ln(x+1) = 0$ par croissance comparée, produit et somme.
$\lim\limits_{x\to+\infty} (1+\frac{1}{x})^x = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} = \lim\limits_{X\to 0} e^{\frac{\ln(1+X)}{X}} = e$ en posant $X=\frac{1}{x}$ et par taux d'accroissement.
$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{xe^x}{3^x} = \lim\limits_{X\to+\infty} -X\left(\frac{3}{e}\right)^X = -\infty$ par produit.

Exercice 19 :

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{i-3}{1+2i} \qquad z_2 = 1+\frac{1}{i} \qquad z_3 = \frac{(2-i)(3+2i)}{4} \qquad z4 = \frac{5+2i}{1-2i} \qquad z_5 = \frac{(2-i)^2}{3+i} \qquad z_6 = \frac{1}{(1-2i)(2+3i)}$$

<u>Correction</u> :

$z_1 = \frac{(i-3)(1-2i)}{5} = -\frac{1}{5}+\frac{7}{5}i.$
$z_2 = 1-i.$
$z_3 = 2+\frac{1}{4}i.$
$z_4 = \frac{(5+2i)(1+2i)}{5} = \frac{1}{5}+\frac{12}{5}i.$
$z_5 = \frac{(2-i)^2(3-i)}{10} = \frac{1}{2}-\frac{3}{2}i.$
$z_6 = \frac{(1+2i)(2-3i)}{5\times 13} = \frac{8}{65}+\frac{1}{65}i.$

Exercice 20 :

Soient z et z' des nombres complexes de module 1. Prouver que $\frac{z+z'}{1+zz'}$ est réel.

<u>Correction</u> :

Notons $Z=\frac{z+z'}{1+zz'}$. On doit montrer que $\overline{Z}=Z$. Remarquons que comme z est de module 1, $\overline{z}=\frac{1}{z}$ et de même pour z'. Donc $\overline{Z}=\frac{\overline{z}+\overline{z}'}{1+\overline{z}\overline{z}'} = \frac{\frac{1}{z}+\frac{1}{z'}}{1+\frac{1}{z}\frac{1}{z'}}$. En multipliant le numérateur et dénominateur par zz', on obtient $\overline{Z}=Z$.

Exercice 21 :
Résoudre $iz^2+(4i-3)z+i-5=0$.

__Correction__ :

$\Delta=(4i-3)^2-4i(i-5)=-3-4i$. On cherche alors δ sous la forme $a+ib$ avec $a^2-b^2=-3$, $2ab=-4$ et $a^2+b^2=5$. On obtient $\delta_1=1-2i$ et $\delta_2=-1+2i$. Donc $z_1=\frac{3-4i+1-2i}{2i}=-3-2i$ et $z_2=-1-i$.

Exercice 22 :
Soient n un entier naturel impair et $q\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.
On pose $S_1=\displaystyle\sum_{0\leq 2k\leq n}q^{2k}$ et $S_2=\displaystyle\sum_{0\leq 2k+1\leq n}q^{2k+1}$.

1. Calculer « directement » les sommes S_1 et S_2.
2. Simplifier S_1+S_2 et S_1-S_2.
   En déduire les valeurs de S_1 et S_2.

__Correction__ :

1. $S_1=\displaystyle\sum_{0\leq 2k\leq n}q^{2k}=\sum_{0\leq k\leq\frac{n-1}{2}}(q^2)^k=\frac{1-(q^2)^{\frac{n+1}{2}}}{1-q^2}=\frac{1-q^{n+1}}{1-q^2}$. $S_2=qS_1$.
2. $S_1+S_2=\displaystyle\sum_{0\leq k\leq n}q^k=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. $\quad S_1-S_2=\displaystyle\sum_{0\leq k\leq n}(-q)^k=\frac{1-q^{n+1}}{1+q}$ car $n+1$ pair.
   Donc $S_1=\frac{1}{2}\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}+\frac{1-q^{n+1}}{1+q}\right)=\frac{1}{2}(1-q^{n+1})\left(\frac{1+q+1-q}{1-q^2}\right)=\frac{1-q^{n+1}}{1-q^2}$. $S_2=\frac{1}{2}\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}-\frac{1-q^{n+1}}{1+q}\right)=qS_1$

Exercice 23 :
Soit n un entier supfieur à 4. Calculer les sommes suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2-nk)$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)(k-1)$
3. $\displaystyle\sum_{j=n}^{2n}(j^2-2j-1)$
4. $\displaystyle\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n}|i-j|$
5. $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leq n}i$
6. $\displaystyle\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}(i-j)^2$

__Correction__ :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2-nk)=\left(\sum_{k=1}^{n}k^2\right)-n\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n^2(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{6}(2n+1-3n)=\frac{n(n+1)(1-n)}{6}$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)(k-1)=\sum_{k=0}^{n}(k^2-1)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-(n+1)=\frac{(n+1)(2n^2+n-6)}{6}=\frac{(n+1)(n+2)(2n-3)}{6}$.
3. $\displaystyle\sum_{j=n}^{2n}(j^2-2j-1)=\sum_{j=n}^{2n}((j-1)^2-2)=\sum_{j=0}^{n}((j+n-1)^2-2)=\sum_{j=0}^{n}(j^2+2(n-1)j+n^2-2n-1)$
   $\displaystyle=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2(n-1)\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)(n^2-2n-1)=\frac{n+1}{6}(n(2n+1)+6n(n-1)+6(n^2-2n-1))$
   $\displaystyle=\frac{n+1}{6}(14n^2-17n-6)=\frac{(n+1)(2n-3)(7n+2)}{6}$.
4. $\displaystyle\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n}|i-j|=2\sum_{0\leqslant j<i\leqslant n}(i-j)=2\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i-1}i-\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n}j\right)=2\left(\sum_{i=1}^{n}i^2-\sum_{j=0}^{n-1}(n-j)j\right)$
   $\displaystyle=2\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}-n\frac{(n-1)n}{2}\right)=\frac{n}{3}(2n^2+3n+1+2n^2-3n+1-3n^2+3n)$
   $\displaystyle=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.
5. $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}i=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}i=\sum_{i=0}^{n}(n+1-i)i=(n+1)\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.
6. $\displaystyle\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}(i-j)^2=\frac{1}{2}\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n}(i-j)^2=\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n}i^2-\left(\sum_{0\leqslant i\leqslant n}i\right)^2=\frac{n(n+1)^2(2n+1)}{6}-\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$

Exercice 24 :

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$.

<u>**Correction**</u> :

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k! = \sum_{k=1}^{n}(k+1-1)k! = \sum_{k=1}^{n}((k+1)! - k!) = (n+1)! - 1$ par somme télescopique.

Exercice 25 :

Etant donné $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k}$ et $\displaystyle\sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \binom{n}{2k+1}$,
2. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} 2^i \binom{n}{i}$,
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} (\ln 2)^k$,
4. $\displaystyle\sum_{j=2}^{n+2} (-1)^j \binom{n}{j-2}$,
5. $\displaystyle\sum_{0 \leqslant p,q \leqslant n} \binom{p}{q}$.

<u>**Correction**</u> :

1. Notons $S_1 = \displaystyle\sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k}$ et $S_2 = \displaystyle\sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \binom{n}{2k+1}$. $S_1 + S_2 = \displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{k} = 2^n$.
   $S_1 - S_2 = \displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0$. Donc $S_1 = S_2 = 2^{n-1}$.
2. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} 2^i \binom{n}{i} = \left(\sum_{i=0}^{n} 2^i \binom{n}{i}\right) - 2^n = 3^n - 2^n$.
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} (\ln 2)^k = \ln(2) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (\ln 2)^k = \ln(2)\big(\ln(2) + 1\big)^{n-1}$.
4. $\displaystyle\sum_{j=2}^{n+2} (-1)^j \binom{n}{j-2} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} = 0$.
5. $\displaystyle\sum_{0 \leqslant p,q \leqslant n} \binom{p}{q} = \sum_{0 \leqslant p \leqslant n} \sum_{0 \leqslant q \leqslant n} \binom{p}{q} = \sum_{0 \leqslant p \leqslant n} 2^p = 2^{n+1} - 1$

Exercice 26 :

Calculer : $A = \arctan(\frac{1}{3}) + \arctan(\frac{1}{2})$.

<u>**Correction**</u> :

Remarquons que par croissance de la fonction arctangente, $0 < A < 2\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{3}$.

De plus, $\tan(A) = \frac{\tan(\arctan(\frac{1}{3})) + \tan(\arctan(\frac{1}{2}))}{1 - \tan(\arctan(\frac{1}{3}))\tan(\arctan(\frac{1}{2}))} = 1 = \tan(\frac{\pi}{4})$.

Par bijectivité de la fonction arctangente sur $[0; \frac{\pi}{3}]$, on obtient $A = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 27 :

On pose $f(x) = \arcsin(\frac{2x}{1+x^2})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.
2. Étudier la parité de la fonction f.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $f(0)$.
4. Déterminer l'ensemble de dérivation de f .
5. Déterminer une expression simple de f' puis de f sur chacun des intervalles.

On va proposer une nouvelle méthode.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on posera le changement de variable $x = \tan(\theta)$ avec $\theta \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

1. Simplifier l'expression de f en fonction de θ, on notera la nouvelle expression $g(\theta)$ où g est une fonction.
2. Rappeler les valeurs de x pour lesquelles on a : $\arcsin o \sin(x) = x$.
3. Étudier la périodicité et la parité de g et en déduire l'intervalle d'étude de g.
4. Pour $\theta \in [0; \frac{\pi}{4}[$, simplifier l'expression de $g(\theta)$.
5. Pour $\theta \in]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[$, calculer de $g(\theta - \frac{\pi}{2})$ de deux façons et en déduire une expression simple de $g(\theta)$.
6. Retrouver l'expression simple de f.

Correction :

1. La fonction arcsinus est définie sur $[-1; 1]$ donc on résoud $-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1$. On trouve alors $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
2. Par composition de deux fonctions impaires, f est impaire.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{1+x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $f(0) = 0$.
4. La fonction arcsinus est dérivable sur $]-1; 1[$ or $\frac{2x}{1+x^2} = \pm 1$ ssi $x = \pm 1$. Donc f est dérivable sur $]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$.
5. $f'(x) = \frac{2(1+x^2)-2x\times 2x}{(1+x^2)^2} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} = \frac{2(1-x^2)\times(1+x^2)}{(1+x^2)^2\times|1-x^2|} = \frac{2}{1+x^2}$ sur $]-1; 1[$ et $-\frac{2}{1+x^2}$ ailleurs.
   Donc $f(x) = -2\arctan(x) + c_1$ sur $]-\infty; -1[$; $f(x) = 2\arctan(x) + c_2$ sur $]-1; 1[$ et $f(x) = -2\arctan(x) + c_3$ sur $]1; +\infty[$. En utilisant la question 2 et 3, on obtient $c_1 = -\pi$, $c_2 = 0$ et $c_3 = \pi$. Remarquons que la continuité est bien conservé en -1 et 1.

1. $g(\theta) = f(\tan(\theta)) = \arcsin\left(\frac{2\tan(\theta)}{1+\tan^2(\theta)}\right) = \arcsin\left(2\tan(\theta)\cos^2(\theta)\right) = \arcsin(\sin(2\theta))$.
2. On a $\arcsin(\sin(x)) = x$ ssi $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.
3. g est clairement π-périodique et impaire donc finalement l'intervalle d'étude est $[0; \frac{\pi}{2}[$.
4. Pour $\theta \in [0; \frac{\pi}{4}[$, $2\theta \in [0; \frac{\pi}{2}[$ donc $g(\theta) = 2\theta$.
5. Pour $\theta \in]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[$, $2\theta \in]\frac{\pi}{2}; \pi[$, donc $2(\theta - \frac{\pi}{2}) \in]-\frac{\pi}{2}; 0[$ donc $g(\theta - \frac{\pi}{2}) = 2\theta - \pi$.
   Parallèlement, $g(\theta - \frac{\pi}{2}) = \arcsin(\sin(2\theta - \pi)) = -\arcsin(\sin(2\theta)) = -g(\theta)$ donc $g(\theta) = -2\theta + \pi$.
6. $f(x) = g(\arctan(x))$. Pour $]1; +\infty[$, $\arctan(x) \in]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[$ donc $f(x) = -2\arctan(x) + \pi$.
   Pour $x \in]-1, 1[$, $\arctan(x) \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$ donc $f(x) = 2\arctan(x)$.
   Pour $x \in]-\infty; -1[$, $f(x) = -f(-x) = -2\arctan(x) - \pi$. On retrouve bien le même résultat.

Exercice 28 :

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$: $\left\{\begin{array}{l} ch(x) + ch(y) = \frac{35}{12} \\ sh(x) + sh(y) = \frac{25}{12} \end{array}\right.$

Correction :

Remarquons d'abord que par somme et différence, ce système est équivalent à $\left\{\begin{array}{c} e^x + e^y = 5 \\ e^{-x} + e^{-y} = \frac{5}{6} \end{array}\right.$.

Posons alors $X = e^x$ et $Y = e^y$, on obtient $\left\{\begin{array}{c} X + Y = 5 \\ \frac{1}{X} + \frac{1}{Y} = \frac{5}{6} \end{array}\right.$. On multiplie la deuxième ligne par XY et on utilise la première ligne : $\left\{\begin{array}{c} X + Y = 5 \\ 5 = \frac{5}{6}XY \end{array}\right.$ ce qui donne $\left\{\begin{array}{c} X + Y = 5 \\ XY = 6 \end{array}\right.$. X et Y sont alors les racines de $Z^2 - 5Z + 6 = 0$. On a donc $X = 2$ et $Y = 3$ ou $X = 3$ et $Y = 2$ donc finalement $\boxed{S = \{(\ln(2), \ln(3)); (\ln(3), \ln(2))\}}$.

Exercice 29 :
Calculer, sur un intervalle approprié, une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$;
2. $t \mapsto \dfrac{e^{\arctan(t)}}{1+t^2}$;
3. $t \mapsto (\tan(t)+1)^2$;
4. $x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)\sin^2(x)}$;
5. $t \mapsto |t^2-4t+3|$;
6. $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$;
7. $t \mapsto \dfrac{t^2}{t^2+1}$;
8. $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{\cos^3(t)}$;
9. $t \mapsto \sin(t)\cos^5(t)$.

Correction :

1. On remarque une forme $\frac{1}{2}\frac{u'}{u^2}$ donc une primitive sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \frac{-1}{2(1+x^2)}$.
2. On remarque une forme $u'e^u$ donc une primitive sur $\mathbb{R}$ est $t \mapsto e^{\arctan(t)}$.
3. Remarquons que $(\tan(t)+1)^2 = 1+\tan^2(t)+2\tan(t)$ donc une primitive sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ est $t \mapsto \tan(t)-2\ln(\cos(t))$.
4. Remarquons que $\frac{1}{\cos^2(x)\sin^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} + \frac{1}{\sin^2(x)}$ donc une primitive sur $]0;\frac{\pi}{2}[$ est $x \mapsto \tan(x) - \frac{1}{\tan(x)}$.
5. Remarquons que $t^2-4t+3 = (t-1)(t-3)$ donc il y a changement de signe en 1 et 3. Sur $[1;3]$, une primitive est $t \mapsto -\frac{t^3}{3}+2t^2-3t$. (Remarquons que sur $]-\infty;1]$ et sur $[3;+\infty[$, on peut choisir l'opposée mais si on cherche une primitive sur un intervalle "à cheval", il faudra bien choisir les constantes pour avoir une fonction continue et dérivable en 1 et/ou 3).
6. On remarque une forme $\frac{u'}{u}$ donc une primitive sur $]1;+\infty[$ est $t \mapsto \ln(\ln(t))$.
7. Remarquons que $\frac{t^2}{1+t^2} = 1 - \frac{1}{1+t^2}$ donc une primitive sur $\mathbb{R}$ est $t \mapsto t - \arctan(t)$.
8. On remarque une forme $-\frac{u'}{u^3}$ donc une primitive sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ est $t \mapsto \frac{1}{2\cos^2(t)}$.
9. On remarque une forme $-u'u^5$ donc une primitive sur $\mathbb{R}$ est $t \mapsto \frac{-\cos^6(t)}{6}$.

Exercice 30 :
Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\cos^2(t)}dt$
2. $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin(t)dt$
3. $\int_0^1 t^2\cos(t)dt$
4. $\int_0^x e^{2t}\cos(t)dt$
5. $\int_1^x \frac{\ln(t)}{t}dt$ $(x>0)$

Correction :

1. On dérive t et on intègre $\frac{1}{\cos^2(t)}$, on obtient $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\cos^2(t)}dt = [t\tan(t)]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)dt = \frac{\pi}{4} - [\ln(\cos(t))]_0^{\frac{\pi}{4}}$ $= \boxed{\frac{\pi}{4}+\ln(\sqrt{2})}$.
2. On dérive arcsin et on intègre 1, on obtient $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin(t)dt = [t\arcsin(t)]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{\pi}{12} + [\sqrt{1-t^2}]_0^{\frac{1}{2}}$ $= \boxed{\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1}$.
3. On va réaliser deux intégrations par parties en dérivant 2 fois t^2, on obtient $\int_0^1 t^2\cos(t)dt = [t^2\sin(t)]_0^1 - \int_0^1 2t\sin(t)dt = \sin(1) + 2[t\cos(t)]_0^1 - 2\int_0^1 \cos(t)dt = \boxed{2\cos(1)-\sin(1)}$.
4. Posons $F(x) = \int_0^x e^{2t}\cos(t)dt$, on réalise deux intégrations par parties en dérivant 2 fois e^{2t}, on obtient $F(x) = [e^{2t}\sin(t)]_0^x - 2\int_0^x e^{2t}\sin(t)dt = e^{2x}\sin(x) + 2[e^{2t}\cos(t)]_0^x - 4F(x)$.
   Donc finalement, $\boxed{F(x) = \frac{1}{5}(e^{2x}\sin(x)+2e^{2x}\cos(x)-2)}$.
5. Posons $G(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{t}dt$. En dérivant ln et en intégrant $\frac{1}{t}$, on obtient $G(x) = [\ln(t)^2]_1^x - G(x)$ donc $\boxed{G(x) = \frac{\ln(x)^2}{2}}$. (Notons qu'on aurait juste pu utiliser la primitive de $u'u$ qui se retrouve facilement par intégration par partie également).

Exercice 31 :

Calculer, à l'aide du changement de variable proposé, les intégrales suivantes :

1. $\int_1^3 \frac{dt}{(1+t)\sqrt{t}}$ en posant $u = \sqrt{t}$;
2. $\int_1^x \frac{\left(1+\frac{1}{t}\right)^4}{t^2} dt$ (où $x > 0$) en posant $u = \frac{1}{t}$;
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}\, dx$, en posant $u = \cos(x)$;
4. $\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}$, en posant $t = \tan(u)$;
5. $\int_1^2 \sqrt{e^x - 1}\, dx$, en posant $u = \sqrt{e^x - 1}$;
6. $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$, en posant $u = \sqrt{t^2 - 1}$.

<u>**Correction**</u> :

1. On a $u = \sqrt{t}$ donc $t = u^2$ et "$dt = 2udu$" donc $\int_1^3 \frac{dt}{(1+t)\sqrt{t}} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2udu}{(1+u^2)u} = [2\arctan(t)]_0^{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{2\pi}{3}}$.
2. On a $u = \frac{1}{t}$ donc $t = \frac{1}{u}$ et "$dt = -\frac{1}{u^2}du$" donc $\int_1^x \frac{\left(1+\frac{1}{t}\right)^4}{t^2} dt = \int_{\frac{1}{x}}^1 (1+u)^4 du = [\frac{(1+u)^5}{5}]_{\frac{1}{x}}^1 = \boxed{\frac{2^5-(1+\frac{1}{x})^5}{5}}$.
3. On a $u = \cos(x)$ donc $x = \arccos(u)$ et "$du = -\sin(x)dx$" donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}\, dx = \int_0^1 \frac{\sin^2(\arccos(u))}{1+u^2} du$.
   Sur $[0,1]$, $\sin^2(\arccos(u)) = 1 - u^2$, donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}\, dx = \int_0^1 \frac{1-u^2}{1+u^2} du = \int_0^1 \frac{2}{1+u^2} - 1 du = \boxed{\frac{\pi}{2} - 1}$.
4. On a $t = \tan(u)$ donc $u = \arctan(t)$ et "$du = \frac{dt}{1+t^2}$" donc $\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{du}{\sqrt{1+\tan^2(u)}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(u)du = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$.
5. On a $u = \sqrt{e^x - 1}$ donc $x = \ln(1+u^2)$ et "$dx = \frac{2u}{1+u^2}$" donc $\int_1^2 \sqrt{e^x - 1}\, dx = 2\int_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^2-1}} \frac{u^2}{1+u^2} du$
   $= \boxed{2[u - \arctan(u)]_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^2-1}}}$.
6. On a $u = \sqrt{t^2-1}$ donc $t = \sqrt{1+u^2}$ et "$dt = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}du$" donc $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1+u^2}u} \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} du = [\arctan(u)]_1^{\sqrt{3}}$
   $= \boxed{\frac{\pi}{12}}$.

Exercice 32 :

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7} \qquad z_2 = \frac{1}{1+e^{i\beta}} \qquad z_3 = 2e^{\frac{2i\pi}{3}} \qquad z_4 = \frac{(2e^{\frac{i\pi}{4}})^2}{e^{\frac{-3i\pi}{4}}} \qquad z_5 = \sqrt{2}(1+i)e^{-2i\theta}$$

<u>**Correction**</u> :

$z_1 = \frac{(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^9}{(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})^7} = 2e^{i\frac{16\pi}{4}} = 2.$

$z_2 = \frac{1}{1+e^{i\beta}} = \frac{1}{e^{i\frac{\beta}{2}} 2\cos(\frac{\beta}{2})} = \frac{1}{2} - i\frac{\tan(\frac{\beta}{2})}{2}.$

$z_3 = -1 + i\sqrt{3}.$

$z_4 = 4e^{i\frac{5\pi}{4}} = -2\sqrt{2} - i2\sqrt{2}.$

$z_5 = 2e^{i(\frac{\pi}{4}-2\theta)} = 2\cos(\frac{\pi}{4} - 2\theta) + i2\sin(\frac{\pi}{4} - 2\theta).$

Exercice 33 :

Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants ainsi que leurs conjugués.

$$z_1 = -2 \qquad z_2 = -3i \qquad z_3 = e^{i\theta} + e^{2i\theta} \qquad z_4 = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i} \qquad z_5 = \frac{1+i\tan(\alpha)}{1-i\tan(\alpha)}$$

<u>**Correction**</u> :

$z_1 = 2e^{i\pi} = \overline{z_1}.$

$z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}.\ \overline{z_2} = 3e^{i\frac{\pi}{2}}.$

$z_3 = 2\cos(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{3\theta}{2}}$. Si $\theta \in [-\pi;\pi][4\pi]$ alors $z_3 = 2\cos(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{3\theta}{2}}$ est la forme trigonométrique et $\overline{z_3} = 2\cos(\frac{\theta}{2})e^{-i\frac{3\theta}{2}}$.
Sinon $z_3 = -2\cos(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{3\theta+2\pi}{2}}$ est la forme trigonométrique et $\overline{z_3} = -2\cos(\frac{\theta}{2})e^{-i\frac{3\theta+2\pi}{2}}$.

$z_4 = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{2}}.\ \overline{z_4} = e^{-i\frac{\pi}{2}}.$

$z_5 = e^{2i\alpha}$. (en multipliant le numérateur et dénominateur par $\cos(\alpha)$). $\overline{z_5} = e^{-2i\alpha}$.

Exercice 34 :

Étant donné $x \in \mathbb{R}$, linéariser les expressions trigonométriques $\cos^4(x)$ et $\cos(x)\sin^2(x)$.

Correction :

$$\cos^4(x) = \frac{1}{2^4}(e^{ix}+e^{-ix})^4 = \frac{1}{2^4}(e^{4ix}+e^{-4ix}+4e^{2ix}+4e^{-2ix}+6) = \frac{1}{8}\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{3}{8}.$$
$$\cos(x)\sin^2(x) = -\frac{1}{8}(e^{ix}+e^{-ix})(e^{ix}-e^{-ix})^2 = -\frac{1}{8}(e^{3ix}+e^{-3ix}-(e^{ix}+e^{-ix})) = \frac{1}{4}\cos(3x)-\frac{1}{4}\cos(x).$$

Exercice 35 :

On cherche à résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $\sin^3(x) = -\sin(3x) \quad (\star)$

1. (a) Étant donné $\theta \in \mathbb{R}$, linéariser l'expression $\sin^3(\theta)$.
   (b) Résoudre l'équation $(\star)$.
2. (a) Étant donné $\theta \in \mathbb{R}$, exprimer $\sin(3\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$ et $\cos(\theta)$.
   (b) Retrouver, d'une autre façon, l'ensemble des solutions de $(\star)$.

Correction :

1. (a) $\sin^3(\theta) = -\frac{1}{8i}(e^{ix}-e^{-ix})^3 = -\frac{1}{8i}(e^{3ix}-e^{-3ix}-3(e^{ix}-e^{-ix})) = \frac{1}{4}(3\sin(x)-\sin(3x))$
   (b) Par la question précédente, $(\star)$ est équivalent à $\sin(3x)=\sin(-x)$. Donc $3x=-x[2\pi]$ ou $3x=\pi+x[2\pi]$. Finalement, $\boxed{S=\{0\left[\frac{\pi}{2}\right]\}}$.
2. (a) $\sin(3\theta) = \mathcal{I}m((e^{i\theta})^3) = \mathcal{I}m((\cos(\theta)+i\sin(\theta))^3) = \mathcal{I}m(\cos^3(\theta)+3i\cos^2(\theta)\sin(\theta)-3\cos(\theta)\sin^2(\theta)-i\sin^3(\theta)) = 3\cos^2(\theta)\sin(\theta)-\sin^3(\theta)$.
   (b) Par la question précédente, $(\star)$ est équivalente à $3\cos^2(\theta)\sin(\theta)=0$ donc $\cos(\theta)=0$ ou $\sin(\theta)=0$ et on retrouve bien le résultat précédent.

Exercice 36 :

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, les sommes $C_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx)$ et $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(kx)$.

Correction :

Remarquons que $C_n(x)+iS_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^{ix})^k = (1+e^{ix})^n = 2^n e^{inx/2}\cos^n\left(\frac{x}{2}\right)$.

Donc $\boxed{C_n(x) = 2^n\cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right) \text{ et } S_n(x) = 2^n\cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}$.

Exercice 37 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y'+y=-1$;
2. $y'+y=\mathrm{e}^x$;
3. $y'+2y=x^2$;
4. $y'+y=-1+x^2+\mathrm{e}^x$.

Correction :

1. L'équation homogène a pour solution $x \mapsto \lambda e^{-x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et -1 est clairement solution particulière donc $\boxed{S=\{x\mapsto \lambda e^{-x}-1|\lambda\in\mathbb{R}\}}$.
2. L'équation homogène a pour solution $x \mapsto \lambda e^{-x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \mapsto \frac{1}{2}e^x$ est clairement solution particulière donc $\boxed{S=\{x\mapsto \lambda e^{-x}+\frac{1}{2}e^x|\lambda\in\mathbb{R}\}}$.
3. L'équation homogène a pour solution $x \mapsto \lambda e^{-2x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \mapsto \frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}$ est clairement solution particulière donc $\boxed{S=\{x\mapsto \lambda e^{-2x}+\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}|\lambda\in\mathbb{R}\}}$.
4. Par principe de superposition, $\boxed{S=\{x\mapsto \lambda e^{-x}+\frac{1}{2}e^x+x^2-2x+1|\lambda\in\mathbb{R}\}}$.

Exercice 38 :

Résoudre, sur l'intervalle proposé, les équations différentielles suivantes :

1. $y' + \dfrac{y}{1+x^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{-\arctan(x)}}{x^2}$ sur $]0,+\infty[$.
2. $y' - y\tan(x) + \cos^2(x) = 0$, sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
   On pourra remarquer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos^3(\theta) = \frac{1}{4}\cos(3\theta) + \frac{3}{4}\cos(\theta)$.
3. $y' + \dfrac{1}{x-1}y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{(x-1)^3}$ sur $]1,+\infty[$.
4. $2x(1-x)y' + (1-x)y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0,1[$.

Correction :

1. L'équation homogène a pour solution $x \mapsto \lambda e^{-arctan(x)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
   On applique ensuite la méthode de la variation de la constante en cherchant une solution particulière sous la forme $x \mapsto \lambda(x)e^{-arctan(x)}$. On obtient alors $\lambda'(x) = \frac{1}{x^2}$ donc on peut prendre $\lambda(x) = -\frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$ et finalement $\boxed{S = \{x \mapsto \left(\lambda - \frac{1}{x}\right)e^{-\arctan(x)} | \lambda \in \mathbb{R}\}}$.
2. L'équation homogène a pour solution $x \mapsto \frac{\lambda}{\cos(x)}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
   On applique ensuite la méthode de la variation de la constante en cherchant une solution particulière sous la forme $x \mapsto \frac{\lambda(x)}{\cos(x)}$. On obtient alors $\lambda'(x) = -\cos^3(x)$ et en utilisant la remarque, on peut prendre $\lambda(x) = -\frac{1}{12}\sin(3x) - \frac{3}{4}\sin(x)$ donc finalement $\boxed{S = \{x \mapsto \frac{\lambda - \frac{1}{12}\sin(3x) - \frac{3}{4}\sin(x)}{\cos(x)} | \lambda \in \mathbb{R}\}}$.
3. L'équation homogène a pour solution $x \mapsto \frac{\lambda}{x-1}$ sur $]1,+\infty[$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
   On applique ensuite la méthode de la variation de la constante en cherchant une solution particulière sous la forme $x \mapsto \frac{\lambda(x)}{x-1}$. On obtient $\lambda'(x) = \frac{x-1}{x} - \frac{1}{(x-1)^2}$, on peut donc prendre $\lambda(x) = x - \ln(x) + \frac{1}{x-1}$ donc finalement $\boxed{S = \{x \mapsto \frac{\lambda + x - \ln(x) + \frac{1}{x-1}}{x-1} | \lambda \in \mathbb{R}\}}$.
4. Sur $]0;1[$, l'équation devient $y' + \frac{1}{2x}y = \frac{1}{2x(1-x)\sqrt{x}}$.
   L'équation homogène a pour solution $x \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{x}}$ sur $]0;1[$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
   On applique ensuite la méthode de la variation de la constante en cherchant une solution particulière sous la forme $x \mapsto \frac{\lambda(x)}{\sqrt{x}}$. On obtient $\lambda'(x) = \frac{1}{2x(1-x)} = \frac{1}{2x} + \frac{\frac{1}{2}}{1-x}$, on peut donc prendre $\lambda(x) = \frac{1}{2}(\ln(x) - \ln(1-x))$ sur $]0;1[$ donc finalement $\boxed{S = \{x \mapsto \frac{\lambda + \frac{1}{2}(\ln(x) - \ln(1-x))}{\sqrt{x}} | \lambda \in \mathbb{R}\}}$.

Exercice 39 :

1. Résoudre sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0,+\infty[$ l'équation $x^2y' - y = 0$.
2. Donner l'ensemble des solutions de $x^2y' - y = 0$ définies sur $\mathbb{R}$.

Correction :

1. Sur $]-\infty, 0[$, $\boxed{S = \{x \mapsto \lambda_1 e^{-\frac{1}{x}} | \lambda_1 \in \mathbb{R}\}}$. Sur $]0;+\infty[$, $\boxed{S = \{x \mapsto \lambda_2 e^{-\frac{1}{x}} | \lambda_2 \in \mathbb{R}\}}$.
2. $\forall \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \lambda_2 e^{-\frac{1}{x}} = 0$; $\forall \lambda_1 \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \lambda_1 e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$; $\forall \lambda_1 \in \mathbb{R}_-^*$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \lambda_1 e^{-\frac{1}{x}} = -\infty$; si $\lambda_1 = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \lambda_1 e^{-\frac{1}{x}} = 0$. Donc pour avoir une solution continue sur $\mathbb{R}$, on a $x \mapsto 0$ sur $[-\infty; 0]$ et $x \mapsto \lambda_2 e^{-\frac{1}{x}}$ sur $]0;+\infty[$.
   Remarquons alors que cette fonction est bien continue, dérivable (par croissance comparée) et solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 40 :

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 5y' + 4y = \mathrm{e}^x$
2. $y'' - 4y' + 4y = 2\mathrm{e}^x$
3. $y'' + 2y' + y = 4\mathrm{e}^{-x}$
4. $y'' + 4y = 3\cos^2(x)$
5. $y'' + 2y' + 2y = 2\mathrm{e}^{-x}\sin(x)$
6. $y'' - 4y' + 3y = 2\mathrm{e}^{3x} + \cos(2x) + \sin(2x)$

Correction :

1. L'équation caractéristique est $x^2 - 5x + 4 = 0$ donc l'équation homogène a pour solution $x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{4x}$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. 1 étant racine simple, on cherche une solution particulière sous la forme $x \mapsto Cxe^x$, on obtient alors $x \mapsto -\frac{1}{3}xe^x$ donc finalement $\boxed{S = \{x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{4x} - \frac{1}{3}xe^x | (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}}$.
2. L'équation caractéristique est $x^2 - 4x + 4 = 0$ donc l'équation homogène a pour solution $x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{2x}$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. 1 n'étant pas racine, on cherche une solution particulière sous la forme $x \mapsto Ce^x$, on obtient alors $x \mapsto 2e^x$ donc finalement $\boxed{S = \{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{2x} + 2e^x | (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}}$.
3. L'équation caractéristique est $x^2 + 2x + 1 = 0$ donc l'équation homogène a pour solution $x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{-x}$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. -1 étant racine double, on cherche une solution particulière sous la forme $x \mapsto Cx^2e^x$, on obtient alors $x \mapsto 2x^2e^x$ donc finalement $\boxed{S = \{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{-x} + 2x^2e^x | (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}}$.
4. L'équation caractéristique est $x^2 + 4 = 0$ donc l'équation homogène a pour solution $x \mapsto \lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x)$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. $3\cos^2(x) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\cos(2x)$, $2i$ étant racine simple, par principe de superposition, on cherche une solution particulière sous la forme $x \mapsto \frac{3}{8} + x\mathcal{R}e(ze^{2ix})$. On obtient alors $x \mapsto \frac{3}{8}(1 + \sin(2x))$ donc finalement $\boxed{S = \{x \mapsto \lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x) + \frac{3}{8}(1 + \sin(2x)) | (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}}$.
5. L'équation caractéristique est $x^2 + 2x + 2 = 0$ donc l'équation homogène a pour solution $x \mapsto e^{-x}(\lambda\cos(x) + \mu\sin(x))$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. $2e^{-x}\sin(x) = \mathcal{I}m(2e^{(-1+i)x})$, $-1+i$ étant racine simple, on cherche une solution particulière sous la forme $x \mapsto x\mathcal{I}m(ze^{(-1+i)x})$. On obtient alors $x \mapsto -xe^{-x}\cos(x)$ donc finalement $\boxed{S = \{x \mapsto e^{-x}(\lambda\cos(x) + \mu\sin(x) - x\cos(x)) | (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}}$.
6. L'équation caractéristique est $x^2 - 4x + 3 = 0$ donc l'équation homogène a pour solution $x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{3x}$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. 3 est solution simple mais $2i$ n'est pas solution donc, par principe de superposition, on cherche une solution particulière sous la forme $x \mapsto Cxe^{3x} + a\cos(2x) + b\sin(2x)$. on obtient $x \mapsto xe^{3x} + \frac{7}{65}\cos(2x) - \frac{9}{65}\sin(2x)$ donc finalement $\boxed{S = \{x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{3x} + xe^{3x} + \frac{7}{65}\cos(2x) - \frac{9}{65}\sin(2x) | (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}}$.

Exercice 41 :

1. Déterminer les racines cubiques de $-1 + i$.
2. Déterminer les racines quatrièmes de $-7 - 24i$.

Correction :

1. $-1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ donc les racines cubiques sont $2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{\pi}{4}}$, $2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{11\pi}{12}}$ et $2^{\frac{1}{6}}e^{-i\frac{5\pi}{12}}$.
2. On va déterminer les racines carrées des racines carrées. On résoud $\left\{\begin{array}{c} x^2 - y^2 = -7 \\ xy = -12 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{array}\right.$ donc $\left\{\begin{array}{c} x^2 = 9 \\ xy = -12 \\ y^2 = 16 \end{array}\right.$.

   On obtient donc deux racines carrées : $z_1 = 3 - 4i$ et $z_2 = -3 + 4i$. On recommence $\left\{\begin{array}{c} x^2 - y^2 = 3 \\ xy = -2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{array}\right.$

   donc $\left\{\begin{array}{c} x^2 = 4 \\ xy = -2 \\ y^2 = 1 \end{array}\right.$. Finalement $\boxed{S = \{1 + 2i, 2 - i, -2 + i, -1 - 2i\}}$.

Exercice 42 :

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue complexe z :

1. $z^8+4z^4+16=0$;
2. $(z+1)^n=(z-1)^n$ (où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$) ;
3. $z^4-z^3+z^2-z+1=0$;
4. $\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^n=\dfrac{1+i\tan a}{1-i\tan a}$ (où $a\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$) ;
5. $z^{2n}-2z^n\cos(na)+1=0$ (où $a\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$)
6. $z^7=\overline{z}$.

__Correction__ :

1. On pose $Z=z^4$ et on résoud $Z^2+4Z+16=0$ donc $Z_1=-2-2i\sqrt{3}=4e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ et $Z_2=-2+2i\sqrt{3}=4e^{i\frac{2\pi}{3}}$ donc finalement $\boxed{S=\{-\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i;-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i;\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i;\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i;\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i;\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i;-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i;-\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\}}$.
2. Remarquons tout d'abord que 1 n'est pas solution donc l'équation est équivalente à $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n=1$ donc $\frac{z+1}{z-1}=e^{2ik\pi/n}$ avec $k\in[|1,n-1|]$ donc $z=\frac{-1-e^{2ik\pi/n}}{1-e^{2ik\pi/n}}=-\frac{\cos(\frac{k\pi}{n})}{\sin(\frac{k\pi}{n})}i$ par la formule de l'angle moitié. Finalement $\boxed{S=\{-cotan(\frac{k\pi}{n})i|k\in[|1,n-1|]\}}$.
3. Posons $Z=-z$, on obtient donc $Z^4+Z^3+Z^2+Z+1=0$ et donc $Z=e^{2ik\pi/5}$ avec $k\in[|1;4|]$. Finalement, $\boxed{S=\{-e^{2ik\pi/5}|k\in[|1,4|]\}}$.
4. Remarquons que $\frac{1+i\tan a}{1-i\tan a}=e^{2ia}$ donc $\frac{1+iz}{1-iz}=e^{2i\frac{a+k\pi}{n}}$ avec $k\in[|0,n-1|]$ donc $z=-\frac{e^{2i\frac{a+k\pi}{n}}-1}{e^{2i\frac{a+k\pi}{n}}+1}i=\tan\left(\frac{a+k\pi}{n}\right)$ donc $\boxed{S=\{\tan\left(\frac{a+k\pi}{n}\right)|k\in[|0,n-1|]\}}$.
5. Posons $Z=z^n$, on a alors $Z^2-2\cos(na)Z+1=0$ donc $Z_1=e^{ina}$ et $Z_2=e^{-ina}$ donc finalement $\boxed{S=\{e^{i(a+\frac{2k\pi}{n})};e^{i(-a+\frac{2k\pi}{n})}|k\in[|0,n-1|]\}}$.
6. Remarquons tout d'abord que 0 est clairement solution. Soit $z\neq 0$ une solution, on a alors $|z|^7=|z|$ donc $|z|=1$ donc z est de la forme e^{ia} avec $a\in\mathbb{R}$. L'équation devient alors $e^{8ia}=1$ donc $a=0[\frac{\pi}{4}]$. Finalement, $\boxed{S=\{0;e^{i\frac{k\pi}{4}}|k\in[|0,7|]\}}$.

Exercice 43 :

1. Montrer que $E=\{(m,2m,-m)\,|\,m\in\mathbb{R}\}\subset F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x+y+3z=0\}$.
2. Montrer que $E=\{t\longmapsto\lambda\sin(t)+\mu\cos(t)\}\,|\,\lambda,\mu\in\mathbb{R}\}\subset F=\{f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})\,|\,f''=-f\}$.
3. Montrer que $E=\{n\longmapsto 3^n(\beta+\frac{1}{2})-\frac{1}{2}\,|\,\beta\in\mathbb{R}\}\subset F=\{(u_n)_n\,|\,\forall n\in\mathbb{N},\,u_{n+1}=3u_n+1\}$.

__Correction__ :

1. Soit $(x,y,z)\in E$, il existe $m\in\mathbb{R}$, $x=m$, $y=2m$ et $z=-m$ donc $x+y+3z=m+2m-3m=0$ donc $(x,y,z)\in F$ donc $E\subset F$.
2. Soit $f\in E$, il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\forall t\in\mathbb{R}$, $f(t)=\lambda\sin(t)+\mu\cos(t)$. On a donc $\forall t\in\mathbb{R}$, $f''(t)=-f(t)$ donc $f\in F$ donc $E\subset F$.
3. Soit $(u_n)_n\in E$, il existe $\beta\in\mathbb{R}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=3^n(\beta+\frac{1}{2})-\frac{1}{2}$ donc $u_{n+1}-3u_n=3^{n+1}(\beta+\frac{1}{2})-\frac{1}{2}-3^{n+1}(\beta+\frac{1}{2})+\frac{3}{2}=1$ donc $(u_n)_n\in F$ donc $E\subset F$.

Exercice 44 :

1. Déterminer $\{(t,t+1)\,|\,t\in\mathbb{R}\}\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x+y=0\}$.
2. Déterminer $\{(\alpha,\beta-\alpha,2\alpha)\,|\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}\cap\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x+y=0 \text{ et } x-y+2z=0\}$.
3. Déterminer $\{t\longmapsto\lambda\cos(t)+\mu e^{-t}\,|\,\lambda,\mu\in\mathbb{R}\}\cap\{f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})\,|\,f^{''}=-f\}$.

Correction :

1. Soit $(x,y)\in\{(t,t+1)\,|\,t\in\mathbb{R}\}\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x+y=0\}$, il existe $t\in\mathbb{R}$, $x=t$, $y=t+1$ et $x+y=t+t+1=2t+1=0$ donc $t=-\frac{1}{2}$. Donc $\{(t,t+1)\,|\,t\in\mathbb{R}\}\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x+y=0\}=\boxed{\{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\}}$.
2. Soit $(x,y,z)\in\{(\alpha,\beta-\alpha,2\alpha)\,|\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}\cap\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x+y=0 \text{ et } x-y+2z=0\}$, il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $x=\alpha$, $y=\beta-\alpha$ et $z=2\alpha$. De plus, $x+y=\beta=0$ et $x-y+2z=\alpha-\beta+\alpha+4\alpha=6\alpha=0$ donc finalement $(x,y,z)=(0,0,0)$ et $\{(\alpha,\beta-\alpha,2\alpha)\,|\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}\cap\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x+y=0 \text{ et } x-y+2z=0\}=\boxed{\{(0,0,0)\}}$.
3. Soit $f\in\{t\longmapsto\lambda\cos(t)+\mu e^{-t}\,|\,\lambda,\mu\in\mathbb{R}\}\cap\{f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})\,|\,f^{''}=-f\}$, il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $\forall t\in\mathbb{R}$, $f(t)=\lambda\cos(t)+\mu e^{-t}$ donc $\forall t\in\mathbb{R}$, $f''(t)+f(t)=2\mu e^{-t}=0$ donc $\mu=0$ et donc $\{t\longmapsto\lambda\cos(t)+\mu e^{-t}\,|\,\lambda,\mu\in\mathbb{R}\}\cap\{f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})\,|\,f^{''}=-f\}=\boxed{\{t\longmapsto\lambda\cos(t)\,|\,\lambda\in\mathbb{R}\}}$.

Exercice 45 :

Soit E un ensemble et A, B, C des sous-ensembles de E. Montrer les propositions suivantes :

1. $A=B\Leftrightarrow A\cup B=A\cap B$
2. $(A\cup B\subset A\cup C$ **et** $A\cap B\subset A\cap C)\Rightarrow B\subset C$

Correction :

1. $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $A=B$ alors $A\cup B=A\cap B=A=B$.
   $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $A\cap B=A\cup B$ alors $A\subset A\cup B=A\cap B$ donc $A\subset A\cap B$ or $A\cap B\subset A$ donc $A=A\cap B$. De même $B=A\cap B$ et donc $A=B$.
2. Supposons que $A\cup B\subset A\cup C$ **et** $A\cap B\subset A\cap C$. Soit $x\in B$, on veut montrer que $x\in C$. Il y a deux cas :
   — Si $x\in A$ alors $x\in A\cap B$ donc $x\in A\cap C$ donc $x\in C$.
   — Si $x\notin A$ alors $x\in A\cup B$ donc $x\in A\cup C$ or $x\notin A$ donc $x\in C$.
   Donc quoi qu'il arrive $x\in C$ et $B\subset C$.

Exercice 46 :

Soit E un ensemble et A, B, C des sous-ensembles de E. Montrer les propositions suivantes :

1. $(A\cup C)\cap\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cap C\cap\overline{B}$
2. $(A\cap C)\cap\overline{(A\cap B)}=A\cap C\cap\overline{B}$

Correction :

1. $(A\cup C)\cap\overline{(A\cup B)}=(A\cup C)\cap(\overline{A}\cap\overline{B})=(A\cap\overline{A}\cap\overline{B})\cup(C\cap\overline{A}\cap\overline{B})=\emptyset\cup(\overline{A}\cap C\cap\overline{B})=\overline{A}\cap C\cap\overline{B}$.
2. $(A\cap C)\cap\overline{(A\cap B)}=(A\cap C)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})=(A\cap C\cap\overline{A})\cup(A\cap C\cap\overline{B})=\emptyset\cup(A\cap C\cap\overline{B})=A\cap C\cap\overline{B}$.

Exercice 47 :

1. Soit $f : E \to E$ une application. Soient A, B deux parties de E. Établir les relations :
$$A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B) \quad ; \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B);$$

2. Soit $f : E \to F$ une application. Soient A, B deux parties de F. Établir les relations :
$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \ , \ f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

<u>**Correction**</u> :

1. — Supposons $A \subset B$. Soit $y \in f(A)$ alors il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$ or $A \subset B$ donc $x \in B$ donc $y \in f(B)$ donc $f(A) \subset f(B)$.
   — $\boxed{\subset}$ Soit $y \in f(A \cup B)$ alors il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$. Si $x \in A$ alors $y \in f(A)$, si $x \in B$ alors $y \in f(B)$ donc $y \in f(A) \cup f(B)$.
   $\boxed{\supset}$ Soit $y \in f(A) \cup f(B)$. Si $y \in f(A)$ alors il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$ et $x \in A \cup B$ donc $y \in f(A \cup B)$. Si $y \in f(B)$ alors il existe $x \in B$ tel que $y = f(x)$ et $x \in A \cup B$ donc $y \in f(A \cup B)$. Donc quoi qu'il arrive, $y \in f(A \cup B)$.
2. — $\boxed{\subset}$ Soit $x \in f^{-1}(A \cup B)$ alors $f(x) \in A \cup B$. Si $f(x) \in A$ alors $x \in f^{-1}(A)$, si $f(x) \in B$ alors $x \in f^{-1}(B)$ donc $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
   $\boxed{\supset}$ Soit $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Si $x \in f^{-1}(A)$ alors $f(x) \in A$ et $f(x) \in A \cup B$ donc $x \in f^{-1}(A \cup B)$. Si $x \in f^{-1}(B)$ alors $f(x) \in B$ et $f(x) \in A \cup B$ donc $x \in f^{-1}(A \cup B)$. Donc quoi qu'il arrive, $x \in f^{-1}(A \cup B)$.
   — $\boxed{\subset}$ Soit $x \in f^{-1}(A \cap B)$ alors $f(x) \in A \cap B$ donc $f(x) \in A$ et $f(x) \in B$. Donc $x \in f^{-1}(A)$ et $x \in f^{-1}(B)$ donc $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
   $\boxed{\supset}$ Soit $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ alors $x \in f^{-1}(A)$ et $x \in f^{-1}(B)$. Donc $f(x) \in A$ et $f(x) \in B$ donc $f(x) \in A \cap B$ et donc $x \in f^{-1}(A \cap B)$.

Exercice 48 :

Pour chaque application et pour y élément de l'ensemble d'arrivée, déterminer le nombre d'antécédent(s) de y (les déterminer si possible), que conclure sur l'application ? Peut-on la rendre bijective en réduisant l'espace de départ ou d'arrivée ?

$$f_1 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x^2 + 3x + 4 \end{array} \right. \ ; \ f_2 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{4x+5}{6x-3} \end{array} \right. \ ; \ f_3 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{2x}{1+x^2} \end{array} \right.$$

<u>**Correction**</u> :

1. Remarquons que la représentation graphique de f_1 est une parabôle tournée vers le haut donc le minimum vaut $\frac{23}{8}$ (en $-\frac{3}{4}$). Il a donc 3 cas :
   — Si $y > \frac{23}{8}$, y a deux antécédents. On les trouve en résolvant $2x^2 + 3x + 4 = y$ soit $x_1 = \frac{-3-\sqrt{8y-23}}{4}$ et $x_2 = \frac{-3+\sqrt{8y-23}}{4}$.
   — Si $y = \frac{23}{8}$, y a un unique antécédent, qui est $-\frac{3}{4}$.
   — Si $y < \frac{23}{8}$ alors y n'a pas d'antécédent.
   On peut donc rendre f_1 bijective en prenant par exemple $f_1 : [-\frac{3}{4}; +\infty[\to [\frac{23}{8}; +\infty[$.
2. On résoud $\frac{4x+5}{6x-3} = y \Leftrightarrow 4x + 5 = y(6x - 3) \Leftrightarrow x(6y - 4) = 3y + 5$ pour $x \neq \frac{1}{2}$. Donc $y = \frac{2}{3}$ ne possède pas d'antécédent et sinon y possède pour unique antécédent $\frac{3y+5}{6y-4}$. Donc on peut rendre f_2 bijective en posant $f_2 : \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} \to \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\}$. (un tableau de variation donnerait le même résultat).
3. On a $\frac{2x}{1+x^2} = y \Leftrightarrow yx^2 - 2x + y = 0$. Donc $\Delta = 4(1 - y^2)$. Donc il y a 4 cas :
   — Si $|y| > 1$, y n'a pas d'antécédent.
   — Si $y = \pm 1$, y a un unique antécédent ± 1.
   — Si $0 < |y| < 1$, y a deux antécédents : $x_1 = \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$ et $x_2 = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$.
   — Si $y = 0$, il y a un unique antécédent 0.
   On peut rendre f_3 bijective en posant par exmple $f_3 : [-1; 1] \to [-1; 1]$.

Exercice 49 :

Soient E, F et G trois ensembles et $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective sur E.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g est aussi surjective.
3. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective alors f est surjective.

Correction :

1. Par l'absurde, si f n'est pas injective, il existe $(x, y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y)$ et $g(f(x)) = g(f(y))$ ce qui contredit l'injectivité de $g \circ f$.
2. Soit $z \in G$, il existe $x \in E$, $g(f(x)) = z$ donc $f(x)$ est un antécédent de z par g donc g est surjective.
3. Par la question 2, g est sujective donc bijective donc $g^{-1} \circ g \circ f = f$ est surjective par composition.

Exercice 50 :

1. Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{2016} par 5 ?
2. Quel est le dernier chiffre de l'écriture décimale de 7^7 ?
3. Quel est le reste de la division euclidienne de 4^{2016} par 7 ?

Correction :

1. On a $6 \equiv 1[5]$ donc $6^{2016} \equiv 1[5]$ donc le reste de la division euclidienne de 6^{2016} par 5 est 1.
2. Remarquons que le dernier chiffre de l'écriture décimale est le reste de la division euclidienne par 10. On cherche alors le cycle de puissance $7 \equiv 7[10]$, $7^2 \equiv -1[10]$ donc $7^4 \equiv 1[10]$. Donc $7^7 \equiv -7[10]$ donc $7^7 \equiv 3[10]$ donc le dernier chiffre de l'écriture décimale de 7^7 est 3.

Exercice 51 :

1. Soit n un entier impair.
   Montrer que $n^2 \equiv 1\,[8]$.
2. Soit p un nombre premier strictement supérieur à 3.
   Montrer que $p^2 - 1$ est divisible par 24.

Correction :

1. n est impair donc il existe k tel que $n = 2k + 1$ donc $n^2 - 1 = 4(k^2 + k) = 4k(k + 1)$. $k(k + 1)$ est clairement pair donc $n^2 - 1$ est divisible par 8 donc $n^2 \equiv 1[8]$.
2. Comme p est premier, $p \neq 2$, p est impair donc par la question 1, $p^2 - 1$ est divisible par 8. De plus, $p > 3$ et premier donc $p \equiv 1[3]$ ou $p \equiv 2[3]$. Dans les deux cas, $p^2 \equiv 1[3]$ donc $p^2 - 1$ est divisible par 3. Finalement comme 3 et 8 sont premiers entre eux, $p^2 - 1$ est divisible par $8 \times 3 = 24$.

Exercice 52 :

Soit p un nombre premier.

1. Démontrer que, pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, $\binom{p}{k}$ est divisible par p.
2. En déduire que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, $(a+b)^p - a^p - b^p$ est divisible par p.
3. Démontrer que, pour tout $a \in \mathbb{N}$, $a^p - a$ est divisible par p.
   On pourra raisonner par récurrence.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^5 - n$ est divisible par 30.

Correction :

1. On a $k\binom{p}{k} = p\binom{p-1}{k-1}$ avec $(\binom{p}{k}, \binom{p-1}{k-1}) \in \mathbb{N}^2$ donc p divise $k\binom{p}{k}$, or p est premier donc en particulier premier avec k et par le lemme de Gauss, p divise $\binom{p}{k}$.
2. $(a+b)^p - a^p - b^p = \sum\limits_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k b^{p-k}$ or par la question 1, p divise $\binom{p}{k}$ pour $k \in [|1; p-1|]$ donc, par somme, $(a+b)^p - a^p - b^p$ est divisible par p.
3. On raisonne par récurrence sur a.
   Initialisation : $0^p - 0 = 0$ qui est bien divisible par p.
   Hérédité : Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que p divise $a^p - a$, montrons le pour $a+1$.
   Par la question 2, $(a+1)^p \equiv a^p + 1[p]$, par hypothèse de récurrence, $a^p \equiv a[p]$ donc $(a+1)^p \equiv a+1[p]$ ce qui conclut la preuve.
4. Par la question précédente, $n^5 - n$ est divisible par 5. On a ensuite $n^2 \equiv n[2]$ donc $n^5 \equiv n[2]$ donc 2 divise $n^5 - n$. Enfin $n^3 \equiv n[3]$ donc $n^5 \equiv n^3[3] \equiv n[3]$ donc 3 divise $n^5 - n$. 2, 3 et 5 étant premiers entre eux, $2 \times 3 \times 5 = 30$ divise $n^5 - n$.

Exercice 53 :

Résoudre le système $\left\{\begin{array}{l} x_\wedge y = 8 \\ x_\vee y = 80 \end{array}\right.$, d'inconnue $(x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

On commencera par calculer la valeur de xy, puis on déterminera les éventuels diviseurs premiers de x...

Correction :

On sait que $xy = (x \wedge y) \times (x \vee y) = 640 = 2^7 \times 5$. Comme $x \wedge y = 8$ alors 2^3 doit diviser x et y donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x = 8k$ avec k qui peut uniquement valoir 1, 2, 5 ou 10 donc finalement $\boxed{S = \{(8, 80); (16, 40); (40; 16); (80, 8)\}}$.

Exercice 54 :

Soient a, b et c trois entiers non nuls.

On cherche à déterminer tous les couples d'entiers (x, y) vérifiant l'équation (E) : $ax + by = c$.

1. Montrer que cette équation admet une solution si et seulement si $a_\wedge b \,|\, c$.
2. *On suppose ici que $a_\wedge b \,|\, c$, et on note a' (resp. b') le quotient de a (resp. b) par $a_\wedge b$.*
   (a) Expliquer comment on peut construire une solution particulière (x_0, y_0) de (E).
   (b) Montrer que tout autre couple solution de (E) est de la forme $(x_0 + kb', y_0 - ka')$, où $k \in \mathbb{Z}$.
   (c) Conclure.
3. Résoudre l'équation $7x - 12y = 3$ dans $\mathbb{Z}^2$.

Correction :

1. $\boxed{\Rightarrow}$ $a \wedge b | a$ et $a \wedge b | b$ donc $a \wedge b | ax + by = c$. $\boxed{\Leftarrow}$ Il existe $k \in \mathbb{N}$, $c = k(a \wedge b)$. Par le théorème de Bézout, il existe $(x', y') \in \mathbb{N}^2$, $ax' + by' = a \wedge b$ donc $x = x'k$ et $y = y'k$ sont solutions.
2. (a) Par construction, a' et b' sont premiers entre eux, par le théorème de Bézout et l'algorithme d'Euclide, on construit x' et y' tels que $a'x' + b'y' = 1$. On a alors le couple $x_0 = \frac{cx'}{a \wedge b}$ et $y_0 = \frac{cy'}{a \wedge b}$ solution particulière.
   (b) On a $a'x + b'y = a'x_0 + b'y_0$ donc $a'(x - x_0) = b'(y_0 - y)$. Donc a' divise $b'(y_0 - y)$ or a' est premier avec b' donc par le lemme de Gauss, a' divise $y_0 - y$ donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = y_0 - a'k$. En reinjectant, dans l'équation précédente, on obtient $a'(x - x_0) = b'a'k$ donc $x = x_0 + b'k$.
   (c) Finalement, $\boxed{S = \{(x_0 + kb', y_0 - ka') | k \in \mathbb{Z}\}}$.
3. On applique la méthode précédente sachant que 7 et 12 sont premiers entre eux donc $7 \wedge 12 = 1$ divise bien 3. On applique ensuite l'algorithme d'Euclide : $12 = 1 \times 7 + 5$, $7 = 1 \times 5 + 2$, $5 = 2 \times 2 + 1$ donc $12 \times 3 - 5 \times 7 = 1$. Donc une solution particulière est $(-15, -9)$. Donc $\boxed{S = \{(-12k - 15, -9 - 7k) | k \in \mathbb{Z}\}}$.

Exercice 55 :

Résoudre l'équation $|x-1|+|2x-3|=5$, d'inconnue $x\in\mathbb{R}$.

Correction :

On étudie l'équation sur chacun des intervalles $]-\infty;1]$, $[1;\frac{3}{2}]$ et $[\frac{3}{2};+\infty[$.

- Sur $]-\infty;1]$, l'équation devient $1-x+3-2x=5$ donc $x=-\frac{1}{3}$ qui est bien dans l'intervalle.
- Sur $[1;\frac{3}{2}]$, l'équation devient $x-1+3-2x=5$ donc $x=-3$ qui n'est pas dans l'intervalle.
- Sur $[\frac{3}{2};+\infty[$, l'équation devient $x-1+2x-3=5$ donc $x=3$ qui est bien dans l'intervalle.

Finalement, $\boxed{S=\{-\frac{1}{3};3\}}$.

Exercice 56 :

Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, et soit $\lambda\in\mathbb{R}$.

1. On note $\lambda A=\{x\in\mathbb{R}\,;\,\exists\, a\in A\,|\,x=\lambda a\}$.
   Montrer que, si $\lambda>0$, λA admet une borne supérieure, et calculer celle-ci.
   Qu'en est-il si $\lambda<0$?
2. On suppose $A\neq\{0\}$, et $A\subset\mathbb{R}_+$.
   On note $A^{-1}=\{x\in\mathbb{R}\,;\,\exists\, a\in A\,|\,xa=1\}$.
   Montrer que A^{-1} admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$, et la calculer.

Correction :

Pour les deux questions, A étant non vide et majorée, A possède une borne supérieure, $\sup(A)$.

1. Notons que A étant non vide, λA l'est aussi. $\forall a\in A$, $a\leq\sup(A)$ donc $\lambda a\leq\lambda\sup(A)$ donc λA est majorée par $\lambda\sup(A)$ donc λA étant non vide et majorée dans $\mathbb{R}$, λA admet une borne supérieure. De plus, $\sup(\lambda A)\leq\lambda\sup(A)$.
   Soit $\varepsilon>0$, par propriété de la borne supérieure, il existe $a\in a$, $a>\sup(A)-\frac{\varepsilon}{\lambda}$ donc $\lambda a>\lambda\sup(A)-\varepsilon$. On applique alors une deuxième fois la propriété de la borne supérieure et on obtient $\sup(\lambda a)\geq\lambda\sup(A)$ donc finalement $\sup(\lambda a)=\lambda\sup(A)$.
   Si $\lambda<0$, tout le raisonnement reste vrai mais les inégalités s'inversent donc λA possède une borne inférieure et $\inf(\lambda A)=\lambda\sup(A)$.
2. Comme $A\neq\{0\}$, A^{-1} est clairement non vide (si $a\neq0$ tel que $a\in A$ alors $\frac{1}{a}\in A^{-1}$).
   $A\subset\mathbb{R}_+$ donc A^{-1} aussi. Donc A^{-1} est non vide et minorée par $\frac{1}{\sup(A)}$ par décroissance de la fonction inverse sur $]0;+\infty[$ donc A^{-1} possède une borne inférieure avec $\inf(A^{-1})\geq\frac{1}{\sup(A)}$. En appliquant deux fois la propriété de la borne supérieure exactement comme dans la question précédente (avec les inégalités qui changent de sens par passage à l'inverse), on obtient $\inf(A^{-1})=\frac{1}{\sup(A)}$.

Exercice 57 :

Soient $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction croissante, et A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$.

1. Justifier que A admet une borne supérieure.
2. Montrer que l'ensemble $f(A)$ admet une borne supérieure.
3. Montrer que $\sup(f(A))\leqslant f(\sup(A))$.
4. Est-il possible que cette inégalité soit stricte ?

Correction :

1. A est non vide et majorée (car bornée) donc A possède une borne supérieure $\sup(A)$.
2. Notons que A étant non vide, $f(A)$ l'est aussi. De plus, $\forall a\in A$, $a\leq\sup(A)$ donc, par croissance de f, $f(a)\leq f(\sup(A))$. Donc $f(A)$ est non vide et majorée donc $f(A)$ possède une borne supérieure $\sup(f(A))$.
3. De plus, la majoration donne, $\sup(f(A))\leq f(sup(A))$.
4. Oui prenons f la fonction partie entière et $A=[0,1[$. $\sup(A)=1$ donc $f(\sup(A))=1$ or $f(A)=\{0\}$ donc $\sup(f(A))=0$. (On verra plus tard qu'il y a égalité si et seulement si f est continue à gauche en $\sup(A)$.)

Exercice 58 :

Étant donnés deux réels x et y, montrer que $\lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor \leqslant \lfloor x+y\rfloor \leqslant \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + 1$.

Correction :

On sait que $\lfloor x\rfloor \leq x$ et $\lfloor y\rfloor \leq y$ donc $\lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor \leq x+y$. Comme $\lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor$ est un entier et que $\lfloor x+y\rfloor$ est le plus grand entier inférieur à $x+y$ alors $\lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor \leq \lfloor x+y\rfloor$.
On a $x < \lfloor x\rfloor + 1$ et $y < \lfloor y\rfloor + 1$ donc $x+y < \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + 2$ donc $\lfloor x+y\rfloor < \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + 2$ et comme les deux termes sont des entiers, $\lfloor x+y\rfloor \leqslant \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + 1$.

Exercice 59 :

Déterminer u_n en fonction de n et de u_0 (et de u_1 pour le dernier) :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 2$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 3^n$. (*somme télescopique*)
3. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (n+1)u_n$. (*produit télescopique*)
4. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$ et $u_0 > 0$, $u_1 > 0$. (*penser au log*)

Correction :

1. $(u_n)_n$ est clairement une suite arithmétique de raison 2 donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n + u_0$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) + u_0 = u_0 + \frac{3^n-1}{2}$.
3. Si $u_0 = 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$ sinon $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$ et $u_n = u_0 \prod\limits_{k=0}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} = n!u_0$ (formule vraie aussi pour $u_0 = 0$.)
4. $u_0 > 0$ et on montre facilement par récurrence double que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Posons alors $v_n = \ln(u_n)$. On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = \frac{1}{2}v_{n+1} + \frac{1}{2}v_n$. On a alors une suite récurrente linéaire d'ordre deux dont léquation caractéristique est $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$. Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \lambda + \mu\left(-\frac{1}{2}\right)^n$. On a alors le système $\begin{cases} \lambda + \mu = \ln(u_0) \\ \lambda - \frac{1}{2}\mu = \ln(u_1) \end{cases}$ ce qui donne $\lambda = \frac{\ln(u_0) + 2\ln(u_1)}{3}$ et $\mu = \frac{2(\ln(u_0) - \ln(u_1))}{3}$ et $u_n = \exp(\frac{\ln(u_0)+2\ln(u_1)}{3} + \frac{2(\ln(u_0)-\ln(u_1))}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n) = (u_0)^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}(u_1)^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$.

Exercice 60 :

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites vérifiant les relations $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \qquad v_{n+1} = 2u_n + 3v_n$$

.

1. Montrer que la suite $(u_n - v_n)_n$ est constante. En déduire que la suite $(u_n)_n$ est arithmético-géométrique.
2. Exprimer pour tout n, u_n et v_n en fonction de n.

Correction :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - v_{n+1} = 3u_n + 2v_n - 2u_n - 3v_n = u_n - v_n$ donc la suite $(u_n - v_n)_n$ est constante égale à -1. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 2(u_n+1) = 5u_n + 2$ donc $(u_n)_n$ est une suite arithmético-géométrique.
2. On applique alors la méthode de résolution des suites arithmético-géométriques.
   — On pose $\ell = -\frac{1}{2}$.
   — On a alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $(u_{n+1} - \ell) = 5(u_n - \ell)$.
   — Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{3}{2}5^n - \frac{1}{2}$.
   On obtient ensuite $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{3}{2}5^n + \frac{1}{2}$.

Exercice 61 :

Montrer, dans chaque cas, que la suite u définie par son terme général précisé ci-dessous est convergente, et calculer sa limite.

1. $u_n = \dfrac{\cos(n)}{n}$;
2. $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$;
3. $u_n = \dfrac{n^2+n-1}{n^2-n\cos n}$;
4. $u_n = \dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$, où $0 < a < b$

__Correction__ :

1. $\cos(n)$ est borné et $\frac{1}{n}$ converge vers 0 donc par produit (u_n) converge vers 0.
2. On utilise la méthode des racines conjuguées, $u_n = \frac{2n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}$. Par somme, composition et quotient, (u_n) converge vers 1.
3. $u_n = \frac{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{1-\frac{\cos(n)}{n}}$. Par la question 1, somme et quotient, (u_n) converge vers 1.
4. $u_n = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n-1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n+1}$. $0 < \left(\frac{a}{b}\right) < 1$ donc $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ tend vers 0 donc par somme et quotient, (u_n) converge vers -1.

Exercice 62 :

On considère la suite u définie par : $\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant u_0 \leqslant 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{1+2u_n} \end{cases}$

1. Justifier que la suite u est bien définie.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.
3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant u_{2n} \leqslant 1$.
   (b) Montrer que (u_{2n}) est monotone.
   (c) Montrer que (u_{2n}) est convergente, puis calculer sa limite.
4. Montrer que (u_{2n+1}) est convergente, et calculer sa limite.
5. En déduire que la suite u est convergente, et calculer sa limite.

__Correction__ :

1. On montre facilement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et donc le quotient ne s'annulera jamais et (u_n) est bien définie.
2. Une rapide étude de la fonction $f : x \mapsto \frac{1+x}{1+2x}$ sur $[0; +\infty[$ montre que f est strictement décroissante donc $f([\frac{1}{2}; 1]) = [f(1); f(\frac{1}{2})] = [\frac{2}{3}, \frac{3}{4}] \subset [\frac{1}{2}; 1]$. Comme $u_{n+1} = f(u_n)$, on montre alors facilement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [\frac{1}{2}; 1]$.
   (a) Posons $g = f \circ f : x \mapsto \frac{2+3x}{3+4x}$. g est croissante sur $[0; +\infty[$ et $g(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $g(1) = \frac{5}{7}$ donc $g([\frac{\sqrt{2}}{2}; 1]) \subset [\frac{\sqrt{2}}{2}; 1]$. Comme $u_{2(n+1)} = g(u_{2n})$, on montre facilement par récurrence que $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant u_{2n} \leqslant 1$.
   (b) Comme g est croissante, $(u_{2n})_n$ est monotone.
   (c) Par la question précédente, $(u_{2n})_n$ est bornée donc $(u_{2n})_n$ est convergente. Notons ℓ la limite. On a $\ell \in [\frac{\sqrt{2}}{2}; 1]$ et comme g est continue, $g(\ell) = \ell$. Or $g(x) = x$ possède une unique solution sur $[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1]$: $\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\ell = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. Par la question 2, $(u_{2n+1})_n$ est bornée. Comme g est croissante, $(u_{2n+1})_n$ est monotone. donc $(u_{2n+1})_n$ est convergente vers l'unique solution de $g(x) = x$ sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ à savoir $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
4. Les termes pairs et impairs convergent vers la même limite $\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc (u_n) converge vers $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 63 :

Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on note, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P_n(x) = -1 + \sum_{k=1}^{n} x^k$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $P_n(x_n) = 0$.
2. En considérant $P_{n+1}(x_n)$, montrer que (x_n) est décroissante.
3. En déduire que (x_n) est convergente.
4. (a) Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $0 \leqslant x_n \leqslant x_2$.
   En déduire que la suite $\left((x_n)^{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

   (b) En trouvant une expression simplifiée de $P_{n+1}(x) - xP_n(x)$, montrer que $\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{2}$.

Correction :

1. $P_n'(x)$ est clairement strictement positif sur $]0;+\infty[$ donc P_n est strictement croissante sur $[0;+\infty[$. P_n est continue sur $\mathbb{R}$ et $P_n(0) = -1$, $\lim_{x\to+\infty} P_n(x) = +\infty$. Par le théorème de la bijection, il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $P_n(x_n) = 0$.
2. Remarquons que $P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{n+1}$ donc $P_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} > 0 = P_{n+1}(x_{n+1})$. Par croissance de P_{n+1} sur $[0;+\infty[$, $x_n > x_{n+1}$ donc $(x_n)_n$ est strictement décroissante.
3. $(x_n)_n$ est décroissante, minorée donc convergente vers une limite $\ell \geq 0$.
4. (a) Comme (x_n) est décroissante, minorée par 0, on a directement $\forall n \geqslant 2$, $0 \leqslant x_n \leqslant x_2$. Donc $\forall n \geqslant 2$, $0 \leqslant (x_n)^{n+1} \leqslant (x_2)^{n+1}$. Or x_2 est la racine positive de $x^2 + x - 1$ à savoir $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} < 1$ donc $((x_2)^{n+1})_n$ converge vers 0. Par le théorème des gendarmes, $((x_n)^{n+1})_n$ converge vers 0.

   (b) Par décalage d'indice, $P_{n+1}(x) - xP_n(x) = 2x - 1$. On prend alors $x = x_n$, on obtient $x_n^{n+1} = 2x_n - 1$. Le terme de gauche converge vers 0 alors que le terme de droite converge vers $2\ell - 1$ donc $\ell = \frac{1}{2}$.

Exercice 64 :

Déterminer un équivalent « simple » de la suite (u_n) dont le terme général est défini par :

1. $u_n = \sqrt{n} + \cos n$
2. $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{4}{n+1}$
3. $u_n = \dfrac{1}{n^2+n} - \dfrac{1}{n^2}$
4. $u_n = \dfrac{\ln(n+1)}{n}$
5. $u_n = \left(n^2 + \dfrac{3}{n}\right)\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}} - 1\right)$
6. $u_n = \left(n^2 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\mathrm{e}^{n+\frac{1}{n}}$

Correction :

1. Comme $\frac{\cos(n)}{\sqrt{n}}$ converge vers 0 ($\cos(n)$ est borné et $\frac{1}{\sqrt{n}}$ converge vers 0), $\cos(n) = o(\sqrt{n})$ donc $u_n \sim \sqrt{n}$.
2. $u_n = \frac{-3n+1}{n^2+n}$ donc $u_n \sim \frac{-3}{n}$.
3. $u_n = \frac{-n}{n^4+n^3}$ donc $u_n \sim \frac{-1}{n^3}$.
4. $\ln(n+1) \sim \ln(n)$ donc $u_n \sim \frac{\ln(n)}{n}$.
5. $n^2 + \frac{3}{n} \sim n^2$, $\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}} - 1 \sim \frac{1}{n^2}$ par taux d'accroissement donc $u_n \sim 1$ par produit.
6. $n^2 + \frac{1}{\sqrt{n}} \sim n^2$, $e^{n+\frac{1}{n}} \sim e^n$ donc par produit, $u_n \sim n^2 e^n$.

Exercice 65 :

Déterminer les limites éventuelles des suites dont le terme général est donné ci-dessous :

1. $\dfrac{n^3 \ln n - \mathrm{e}^n}{(\ln n)^2 + n^2}$;
2. $\left(1 + \dfrac{1}{2^n}\right)^{n^2}$;
3. $\dfrac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1}$;
4. $\dfrac{\exp\left(-\frac{1}{2n^2}\right) - \cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{1 - \frac{1}{n}} - 1}$.

Correction :

1. $\frac{n^3 \ln n - \mathrm{e}^n}{(\ln n)^2 + n^2} \sim -\frac{e^n}{n^2} \to -\infty$ par croissance comparée.
2. $\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^{n^2} = e^{n^2 \ln(1 + \frac{1}{2^n})}$. $\frac{1}{2^n} \to 0$ donc $\ln(1 + \frac{1}{2^n}) \sim \frac{1}{2^n}$ donc $n^2 \ln(1 + \frac{1}{2^n}) \to 0$ donc $\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^{n^2} \to 1$.
3. $\frac{1}{n} \to 0$ donc $\sin(\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$ et $e^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n}$ donc $\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1} \to 1$.
4. $\frac{\exp\left(-\frac{1}{2n^2}\right) - \cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2n^2}\right) - 1}{\frac{1}{n^2}} - \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1}{\frac{1}{n^2}} \to -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$ donc $\exp\left(-\frac{1}{2n^2}\right) - \cos\left(\frac{1}{n}\right) = o(\frac{1}{n^2})$.
   Comme $\frac{1}{n} \to 0$, $\sqrt{1 - \frac{1}{n}} - 1 \sim -\frac{1}{2n}$. Finalement par quotient, $\frac{\exp\left(-\frac{1}{2n^2}\right) - \cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{1 - \frac{1}{n}} - 1} \to 0$.

Exercice 66 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.

On pourra écrire $A = 2I_3 + \cdots$

Correction :

Posons $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On remarque alors que $A = 2I_3 + B$, $I_3 B = B I_3 = B$ et $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^3 = 0_3$. En appliquant le binôme de Newton, on obtient donc $\forall n \geq 2$, $A^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k (2I_3)^{n-k} = 2^n I_3 + n 2^{n-1} B + n(n-1) 2^{n-3} B^2$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$. (On remarque que la formule reste vraie pour $n = 0$ et $n = 1$).

Exercice 67 :

Soient a un réel non nul, et $M = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer M^2 en fonction de I_3 et M.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n vérifiant : $M^n = a_n M + b_n I_3$.
3. Déterminer l'expression de a_n et b_n en fonction de n.

Correction :

1. $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 2 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 2 \end{pmatrix} = 2I_3 + M$.
2. On procède par récurrence :
   Initialisation : $a = 0 = 0$, $b_0 = 1$.
   Hérédité : Soit n tel que la propriété est vraie.
   $M^{n+1} = M \times M^n = M(a_n M + b_n I_3) = a_n M^2 + b_n M = (a_n + b_n)M + 2a_n I_3$.
   Donc la prorpiété est vrai pour tout n avec la relation de récurrence : $a_{n+1} = a_n + b_n$ et $b_{n+1} = 2a_n$.
3. On a alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$, c'est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 avec $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$. On obtient donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n)$ et $b_n = \frac{1}{3}(2^n + 2(-1)^n)$.

Exercice 68 :

Déterminer, pour chacune des matrices suivantes, si elle est inversible, et calculer, le cas échéant, son inverse :

1. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ i & 1 & i \\ i & -i & 1 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix}$, où $a \in \mathbb{R}$

<u>**Correction**</u> :

1. <u>Méthode 1</u> : $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} = I_3$ donne $\begin{cases} 2g-a=1 \\ 2h-b=0 \\ 2k-c=0 \\ g=0 \\ h=1 \\ k=0 \\ g-d=0 \\ h-e=0 \\ k-f=1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} a=-1 \\ b=2 \\ c=0 \\ d=0 \\ e=1 \\ f=-1 \\ g=0 \\ h=1 \\ k=0 \end{cases}$.

   Donc $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   <u>Méthode 2</u> : On résoud $\begin{cases} -x+2z=a \\ z=b \\ -y+z=c \end{cases}$ ce qui donne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b-a \\ b-c \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

   Il y a une unique solution pour tout (a,b,c) donc $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et d'inverse $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. On résoud $\begin{cases} x-y=a \\ x+2y+z=b \\ x+y=c \end{cases}$. On fait $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ ce qui donne $\begin{cases} x-y=a \\ 3y+z=b-a \\ 2y=c-a \end{cases}$.

   Donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a+c}{2} \\ \frac{c-a}{2} \\ \frac{a+2b-3c}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

   Il y a une unique solution pour tout (a,b,c) donc $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et d'inverse $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

3. On résoud $\begin{cases} x+iy-iz=a \\ ix+y+iz=b \\ ix-iy+z=c \end{cases}$. On fait $L_2 \leftarrow L_2 - iL_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - iL_1$ ce qui donne $\begin{cases} x+iy-iz=a \\ 2y+(-1+i)z=b-ia \\ (1-i)y=c-ia \end{cases}$.

   Donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(1-i)b+(-1-i)c}{2} \\ \frac{(1-i)a+(1+i)c}{2} \\ \frac{(1+i)a-(1+i)b+2ic}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1-i & -(1+i) \\ 1-i & 0 & 1+i \\ 1+i & -(1+i) & 2i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

   Il y a une unique solution pour tout (a,b,c) donc $\begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ i & 1 & i \\ i & -i & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1-i & -(1+i) \\ 1-i & 0 & 1+i \\ 1+i & -(1+i) & 2i \end{pmatrix}$.

4. On résoud $\begin{cases} (1+a)x+y+z=b \\ x+(1+a)y+z=c \\ x+y+(1+a)z=d \end{cases}$. On fait $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ ce qui donne $\begin{cases} (1+a)x+y+z=b \\ -ax+ay=c-b \\ -ax+az=d-b \end{cases}$.

   Si $a=0$, il n'y a pas une unique solution donc la matrice n'est pas inversible. Sinon, on obtient $\begin{cases} (3+a)x = \frac{(2+a)b-c-d}{a} \\ y = \frac{c-b}{a}+x \\ z = \frac{d-b}{a}+x \end{cases}$.

   Si $a=-3$, il n'y a pas une unique solution donc la matrice n'est pas inversible.

   Si $a \neq 0$, $a \neq -3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(2+a)b-c-d}{(3+a)a} \\ \frac{(-b+(2+a)c-d}{(3+a)a} \\ \frac{-b-c+(2+a)d}{(3+a)a} \end{pmatrix} = \frac{1}{(3+a)a}\begin{pmatrix} 2+a & -1 & -1 \\ -1 & 2+a & -1 \\ -1 & -1 & 2+a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix}$. Il y a une unique solution pour tout (b,c,d) donc $\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse $\frac{1}{(3+a)}\begin{pmatrix} 2+a & -1 & -1 \\ -1 & 2+a & -1 \\ -1 & -1 & 2+a \end{pmatrix}$.

Exercice 69 :

Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} x-2y+z-3t=1 \\ 2x+y-z+t=-1 \end{cases}$ dans $\mathbb{R}^4$.

2. $\begin{cases} y+z+t=1 \\ x-y+z-t=0 \\ 2x+y+z=2 \end{cases}$ dans $\mathbb{R}^4$.

3. $\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ x+3y-z=11 \\ 2x+5y-5z=13 \\ x+4y+z=18 \end{cases}$ dans $\mathbb{R}^3$.

4. $x+2y-z=0$ dans $\mathbb{R}^3$.

Correction :

1. $\begin{cases} x-2y+z-3t=1 \\ 2x+y-z+t=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+z-3t=1 \\ 5y-3z+7t=-3 \end{cases}$ donc $\boxed{S=\{(-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}z+\frac{1}{5}t, -\frac{3}{5}+\frac{3}{5}z-\frac{7}{5}t, z, t)\,|\,(z,t)\in\mathbb{R}^2\}}$.

2. $\begin{cases} y+z+t=1 \\ x-y+z-t=0 \\ 2x+y+z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z-t=0 \\ y+z+t=1 \\ 3y-z+2t=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z-t=0 \\ y+z+t=1 \\ -4z-t=-1 \end{cases}$ donc $\boxed{S=\{(-2z+1, 3z, z, -4z+1)\,|\,z\in\mathbb{R}\}}$.

3. $\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ x+3y-z=11 \\ 2x+5y-5z=13 \\ x+4y+z=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3z=4 \\ y+2z=7 \\ y+z=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3z=4 \\ y+2z=7 \\ z=2 \end{cases}$ donc $\boxed{S=\{(4,3,2)\}}$.

4. $x+2y-z=0$ donc $\boxed{S=\{(-2y+z, y, z)\,|\,(y,z)\in\mathbb{R}^2\}}$.

Exercice 70 :

Résoudre les systèmes suivants, en discutant suivant les valeurs du paramètre réel λ et du paramètre complexe a :

1. $\begin{cases} 2x+3y-2z=5 \\ x-2y+3z=2 \\ 4x-y+4z=\lambda \end{cases}$

2. $\begin{cases} ax-a^2y+az=1 \\ x-ay+a^2z=a \\ ax+y-a^3z=1 \end{cases}$

Correction :

1. $\begin{cases} 2x+3y-2z=5 \\ x-2y+3z=2 \\ 4x-y+4z=\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z=2 \\ 2x+3y-2z=5 \\ 4x-y+4z=\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z=2 \\ 7y-8z=1 \\ 7y-8z=\lambda-8 \end{cases}$. Si $\lambda\neq 9$, il n'y a pas de solution. Pour $\lambda=9$, on a $\begin{cases} x-2y+3z=2 \\ 7y-8z=1 \end{cases}$ donc $\boxed{S=\{(\frac{16-5z}{7}, \frac{1+8z}{7}, z)\,|\,z\in\mathbb{R}\}}$.

2. $\begin{cases} ax-a^2y+az=1 \\ x-ay+a^2z=a \\ ax+y-a^3z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-ay+a^2z=a \\ ax-a^2y+az=1 \\ ax+y-a^3z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-ay+a^2z=a \\ a(1-a^2)z=1-a^2 \\ (1-a^2)y-2a^3z=1-a^2 \end{cases}$.

   Si $a=0$, il n'y a pas de solution à cause de la deuxième équation.

   Si $a=\pm1$, le système devient $\begin{cases} x-ay+a^2z=a \\ -2a^3z=0 \end{cases}$. Donc $\boxed{S=\{(a(1+y), y, 0)\,|\,y\in\mathbb{R}\}}$.

   Sinon, le système devient $\begin{cases} x=a+2\frac{a^3}{1-a^2} \\ z=\frac{1}{a} \\ y=1+2\frac{a^2}{1-a^2} \end{cases}$. Donc $\boxed{S=\{(a+2\frac{a^3}{1-a^2}, 1+2\frac{a^2}{1-a^2}, \frac{1}{a})\}}$.

Exercice 71 :

Soient a et b deux nombres réels.

Montrer que l'ensemble $G = \left\{k \times a + \ell \times b\,;\ (k, \ell) \in \mathbb{Z}^2\right\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

Correction :

— Clairement $G \subset \mathbb{R}$ (car $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un anneau et que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$).

— Pour $k = l = 0$, on obtient bien $0 \in G$.

— Soit $(x, y) \in G^2$, il existe $(k_1, k_2, \ell_1, \ell_2) \in \mathbb{Z}^4$ tel que $x = k_1 \times a + \ell_1 \times b$ et $y = k_2 \times a + \ell_2 \times b$. Alors $x+y = (k_1+k_2)\times a+(\ell_1+\ell_2)\times b$. (car $(\mathbb{R}, +)$ est commutatif et $(\mathbb{R}, +, \times)$ distributif). Or $(k_1+k_2, \ell_1+\ell_2) \in \mathbb{Z}^2$ (car $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe) donc $x + y \in G$.

— Soit $x \in G$, il existe $(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = k \times a + \ell \times b$ donc $-x = (-k) \times a + (-\ell) \times b$ (car $(\mathbb{R}, +, \times)$ est distributif). Or $(-k, -\ell) \in \mathbb{Z}^2$ (car $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe) donc $-x \in G$.

Donc $(G, +)$ est bien un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

Exercice 72 :

1. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
   Montrer que l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines n-ièmes de l'unité est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
2. Montrer que l'ensemble $V = \{z \in \mathbb{C}\,;\ \exists\, n \in \mathbb{N}^* \mid z^n = 1\}$, muni de la multiplication de $\mathbb{C}$, est un groupe.

Correction :

1. — Clairement $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{C}^*$. (par construction et $0^n = 0 \neq 1$).
   — $1^n = 1$ donc $1 \in \mathbb{U}_n$.
   — Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{U}_n^2$, $(z_1z_2)^n = z_1^n z_2^n = 1$ (car $(\mathbb{C}, \times)$ est commutatif) donc $z_1z_2 \in \mathbb{U}_n$.
   — Soit $z \in \mathbb{U}_n$ alors $z \neq 0$ donc $\frac{1}{z}$ est bien définie et $(\frac{1}{z})^n = \frac{1}{z^n} = 1$ (car $(\mathbb{C}, \times)$ est commutatif) donc $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}_n$.
   Donc $(\mathbb{U}_n, \times)$ est bien un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
2. Pour $(n, m) \in (N^*)^2$, remarquons que $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}_{nm}$ et $\mathbb{U}_m \subset \mathbb{U}_{nm}$.
   — Clairement $V \subset \mathbb{C}^*$. (par construction et $0^n = 0 \neq 1$).
   — $1^1 = 1$ donc $1 \in V$.
   — Soit $(z_1, z_2) \in V^2$, il existe $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $(z_1, z_2) \in \mathbb{U}_n \times \mathbb{U}_m$ donc $(z_1, z_2) \in \mathbb{U}_{nm}^2$ donc $z_1z_2 \in \mathbb{U}_{nm}$ donc $z_1z_2 \in V$.
   — Soit $z \in V$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $z \in \mathbb{U}_n$ donc $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}_n$ donc $\frac{1}{z} \in V$.
   Donc $(V, \times)$ est bien un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Exercice 73 :

On appelle *entier de Gauss* tout nombre complexe de la forme $a + ib$, où $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

On note $\mathbb{Z}[i]$ l'ensemble des entiers de Gauss.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
2. Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.
   On pourra commencer par calculer le module au carré d'un élément inversible de $\mathbb{Z}[i]$.
3. Un entier de Gauss a est dit *irréductible* lorsque, pour tout $(b, c) \in (\mathbb{Z}[i])^2$, si $a = bc$, alors b ou c est inversible.
   L'entier 2 est-il irréductible ?

Correction :

1. — $\mathbb{Z}[i] \subset \mathbb{C}$ par construction.
   — $1 = 1 + 0 \times i \in \mathbb{Z}[i]$.
   — Soit $(z_1, z_2) \in (\mathbb{Z}[i])^2$ alors il existe $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{Z}^4$ tel que $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$. Donc $-z_1 = (-a_1) + i(-b_1) \in \mathbb{Z}[i]$ et $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \in \mathbb{Z}[i]$ en utilisant les propriétés d'anneau de $\mathbb{C}$ et de groupe de $\mathbb{Z}$. Donc $(\mathbb{Z}[i], +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}, +)$.
   — Soit $(z_1, z_2) \in (\mathbb{Z}[i])^2$ alors il existe $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{Z}^4$ tel que $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$. Donc $z_1z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1) \in \mathbb{Z}[i]$ en utilisant les propriétés d'anneau de $\mathbb{C}$ et de $\mathbb{Z}$.
   Donc $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
2. Soit z un inversible de $\mathbb{Z}[i]$ alors il existe $z' \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $zz' = 1$ donc $|z|^2|z'|^2 = 1$ or $(|z|^2, |Z'|^2) \in \mathbb{Z}^2$ donc $|z|^2 = |z'|^2 = 1$. Posons $z = a + ib$, on obtient $a^2 + b^2 = 1$ donc $a = \pm 1$ et $b = 0$ ou $a = 0$ et $b = \pm 1$. Finalement, $\mathbb{Z}[i]^\times \subset \{1; -1; i; -i\}$. L'inclusion réciproque étant directe, $\mathbb{Z}[i]^\times = \{1; -1; i; -i\}$.
3. $2 = (1 + i)(1 - i)$ donc 2 n'est pas irréductible.

Exercice 74 :

Déterminer les limites suivantes, en justifiant vos calculs :

$a.\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x+2}{x\ln(x)},\quad b.\ \lim\limits_{x\to 0^+} 2x\ln(x+\sqrt{x}),\quad c.\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3-2x^2+3}{x\ln(x)},\quad d.\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}+1}}{x+2},\quad e.\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(3+x)}{2x},$

$f.\ \lim\limits_{x\to 0^+} x^x-1,\quad g.\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{2+\sin(\frac{1}{x})},\quad h.\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\lfloor x\rfloor}{x},\quad k.\ \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\lfloor x\rfloor}{x},\quad l.\ \lim\limits_{x\to 1^+} (x-1)^x.$

Correction :

a. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)=0$ or ln est négative sur $]0,1]$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)=0^-$. $\lim\limits_{x\to 0^+} x+2=2$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x+2}{x\ln(x)}=-\infty$.

b. Pour $x>0$, $2x\ln(x+\sqrt{x})=x\ln(x)+2x\ln(1+\sqrt{x})$. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)=0$ par croissance comparée. $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(1+\sqrt{x})=0$. Par produit et somme, $\lim\limits_{x\to 0^+} 2x\ln(x+\sqrt{x})=0$.

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3-2x^2+3}{x\ln(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\ln(x)}(1-\frac{2}{x}+3\frac{1}{x^3})$. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\ln(x)}=+\infty$. Par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^3})=1$ donc finalement par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-2x^2+3}{x\ln(x)}=+\infty$.

d. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{\sqrt{x}+1}}{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{\sqrt{x}}}{x}\frac{e}{1+\frac{2}{x}}$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{\sqrt{x}}}{x}=\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{e^X}{X^2}=+\infty$ par croissance comparée, en posant $X=\sqrt{x}$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{\sqrt{x}+1}}{x+2}=+\infty$ par produit.

e. $\lim\limits_{x\to 0+}\ln(3+x)=\ln(3)>0$ donc par quotient, $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(3+x)}{2x}=+\infty$.

f. Pout tout $x>0$, $x^x=e^{x\ln(x)}$ or par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)=0$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x-1=0$.

g. Pour tout $x\neq 0$, $\sin(\frac{1}{x})\in[-1;1]$ donc $\frac{1}{2+\sin(\frac{1}{x})}\in[\frac{1}{3};1]$ donc par produit, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{2+\sin(\frac{1}{x})}=0$.

h. Pour tout $x\in[0;1[$, $\lfloor x\rfloor=0$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\lfloor x\rfloor}{x}=0$.

k. Pour tout $x\in[-1;0[$, $\lfloor x\rfloor=-1$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\lfloor x\rfloor}{x}=+\infty$.

l. Pour tout $x>1$, $(x-1)^x=e^{x\ln(x-1)}$ donc $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)^x=0$.

Exercice 75 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, croissante, et telle que la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
Montrer que $f(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$.

Correction :

Soit $A>0$, comme $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, il existe $N\in\mathbb{N}$, $\forall n\geq N$, $f(n)\geq A$ or f est croissante donc $\forall x\geq N$, $f(x)\geq f(N)\geq A$ donc $f(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$.

Exercice 76 :

Déterminer les limites suivantes, en justifiant vos calculs :

$a.\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-8x^3+1}{4x+16}$, $b.\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^2+4}{x^2+x+1}$, $c.\ \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1}-x$, $d.\ \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x-1}+x$,

$e.\ \lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt{x}+1$, $f.\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+\cos(x)}{\sqrt{x}}$, $g.\ \lim\limits_{x\to1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$, $h.\ \lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+\ln(x))$,

$i.\ \lim\limits_{x\to0} (x\ln(x)-x\ln(\frac{1}{1+x}))$, $j.\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^x}$, $k.\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x\ln(-x)}$, $l.\ \lim\limits_{x\to1^-} \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{x^{1-x}}$.

Correction :

a. Par quotient de polynômes, on regarde juste les monômes dominant donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-8x^3+1}{4x+16} = \lim\limits_{x\to-\infty} -2x^2 = -\infty$.

b. Par quotient de polynômes, on regarde juste les monômes dominant donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^2+4}{x^2+x+1} = 3$.

c. Pour tout $x \geq 0$, $\sqrt{x^2+x+1}-x = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{1+\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1}-x = \frac{1}{2}$.

d. Posons $X=-x$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x-1}+x = \lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X^2-X-1}-X = -\frac{1}{2}$ avec le même raisonnement que c.

e. $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt{x}+1 = \lim\limits_{x\to+\infty} x(1-\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}) = +\infty$.

f. $x \mapsto 1+\cos(x)$ est bornée donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+\cos(x)}{\sqrt{x}} = 0$.

g. Par taux d'accroissement de $x \mapsto \sqrt{x}$ en 1, $\lim\limits_{x\to1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{1}{2}$.

h. Par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+\ln(x)) = +\infty$.

i. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to0} x\ln(x) = 0$. Par produit, $\lim\limits_{x\to0} x\ln(\frac{1}{1+x}) = 0$. Donc par somme, $\lim\limits_{x\to0} (x\ln(x)-x\ln(\frac{1}{1+x})) = 0$.

j. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^x} = 0$.

k. Par quotient et produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x\ln(-x)} = 0$.

l. $\lim\limits_{x\to1^-} x^{1-x} = \lim\limits_{x\to1^-} e^{(1-x)\ln(x)} = 1$. $\lim\limits_{x\to1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to1^-} \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{x^{1-x}} = 0$.

Exercice 77 :

On considère deux fonctions f et g, déterminer si $f = o_a(g)$ ou si $g = o_a(f)$.

1. $f(x) = e^{3x^2}$ et $g(x) = \ln^{10}(x)$ en $a = +\infty$.
2. $f(x) = x^3 \ln(x)$ et $g(x) = x^2$ en $a = 0^+$.
3. $f(x) = e^{2x} + \frac{1}{x^2}$ et $g(x) = \frac{1}{x}$ en $a = +\infty$.
4. $f(x) = \ln(x)e^{\sqrt{x}}$ et $g(x) = x^2$ en $a = +\infty$
5. $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \ln(x)$ en $a = 0^+$.

Correction :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$ par croissance comparée donc $g = o_{+\infty}(f)$.
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ par croissance comparée donc $f = o_{0^+}(g)$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ donc $g = o_{+\infty}(f)$.
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{1}{\ln(X^2)\frac{e^X}{X^4}} = 0$ en posant $X = \sqrt{x}$ et par croissance comparée donc $g = o_{+\infty}(f)$.
5. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ par quotient donc $f = o_{0^+}(g)$.

Exercice 78 :

Donner un équivalent au voisinage de a des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \frac{\tan(x)^2}{x-2x^3}$ en $a = 0$
2. $f_2(x) = \frac{(x^3-5x^4)}{\sin(x)^2(e^{2x}-1)}$ en $a = 0$
3. $f_3(x) = \frac{(e^{-x}-1)}{x}$ en $a = 0$
4. $f_4(x) = \frac{x^9-10x^8}{12x^9-7x}$ en $a = -\infty$
5. $f_5(x) = \frac{(\cos(2x)-1)\sin^2(x)}{(1-2x^2)^2}$ en $a = 0$
6. $f_6(x) = \frac{(\sqrt{1-\sin(x)}-1)(e^{\sqrt{x}}-1)}{\tan^2(x)(x-3)}$ en $a = 0$
7. $f_7(x) = e^{2x}\ln(1+3x)$ en $a = 0$
8. $f_8(x) = \frac{3x^2-x^4}{\ln(1-2x)^2}$ en $a = 0$
9. $f_9(x) = x^3 + 6\ln(x)$ en $a = 0$
10. $f_{10}(x) = \frac{1}{3x^2} + e^{2x}$ en $a = +\infty$
11. $f_{11}(x) = \frac{e^{3x}+\sqrt{x}}{x^6+\ln(x)}$ en $a = 0$
12. $f_{12}(x) = \frac{e^{3x}+\sqrt{x}}{x^6+\ln(x)}$ en $a = +\infty$
13. $f_{13}(x) = \frac{x^2-\sqrt{x}}{e^{-x}+x^2}$ en $a = 0$

Correction :

1. $f_1(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{x} = x$.
2. $f_2(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{x^2\times 2x} = \frac{1}{2}$.
3. $f_3(x) \underset{0}{\sim} \frac{-x}{x} = -1$.
4. $f_4(x) \underset{-\infty}{\sim} \frac{x^9}{12x^9} = \frac{1}{12}$.
5. $f_5(x) \underset{0}{\sim} \frac{-\frac{(2x)^2}{2}\times x^2}{1} = -2x^4$.
6. $f_6(x) \underset{0}{\sim} \frac{\frac{-\sin(x)}{2}\times\sqrt{x}}{x^2\times(-3)} = \frac{1}{6\sqrt{x}}$.
7. $f_7(x) \underset{0}{\sim} 1\times 3x = 3x$.
8. $f_8(x) \underset{0}{\sim} \frac{3x^2}{(-2x)^2} = \frac{3}{4}$.
9. $f_9(x) \underset{0}{\sim} 6\ln(x)$ (forme $u+v$ avec $u = o(v)$).
10. $f_{10}(x) \underset{+\infty}{\sim} e^{2x}$ (forme $u+v$ avec $u = o(v)$).
11. $f_{11}(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{\ln(x)}$ (forme $u+v$ avec $u = o(v)$).
12. $f_{12}(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{3x}}{x^6}$ (forme $u+v$ avec $u = o(v)$).
13. $f_{13}(x) \underset{0}{\sim} \frac{-\sqrt{x}}{1} = -\sqrt{x}$ (forme $u+v$ avec $u = o(v)$).

Exercice 79 :

On cherche à déterminer l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad (\star)$$

1. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, vérifiant $(\star)$.
   On suppose qu'une telle fonction existe.
   (a) Calculer $f(0)$.
   (b) Montrer que f est impaire.
   On pose $a = f(1)$.
   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(n) = na$.
   (d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $f(n) = na$.
   (e) Montrer que, pour tout $r \in \mathbb{Q}$, on a $f(r) = ra$.
   (f) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xa$.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant $(\star)$.

Correction :

1. (a) $f(0+0) = f(0) + f(0)$ donc $f(0) = 0$.
   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$.
   (c) On montre facilement par récurrence sur n que pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = nf(x)$.
   (d) Ce résultat est immédiat par les questions b et c.
   (e) Posons $r = \frac{p}{q}$ avec $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ alors $pa = f(p) = f(q \times r) = qf(r)$ donc $f(r) = ra$.
   (f) On remarque que les fonction $x \mapsto xa$ et f coïncident sur $\mathbb{Q}$ et elles sont toutes les deux continues donc par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xa$.
2. Par les questions précédentes, l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant $(\star)$ est l'ensemble des fonctions linéaires.

Exercice 80 :

Étudier la continuité de :
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} \end{array}$$

Correction :

— On remarque tout d'abord que $\lfloor x \rfloor \leq x$ donc f est bien définie.
— $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ donc par somme et composée, f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
— Il reste maintenant à étudier en tout point de $\mathbb{Z}$. Soit $k \in \mathbb{Z}$, $\lim\limits_{x \to k^-} \lfloor x \rfloor = k-1$ donc $\lim\limits_{x \to k^-} f(x) = k - 1 + \sqrt{k - (k-1)} = k$ et $\lim\limits_{x \to k^+} \lfloor x \rfloor = k$ donc $\lim\limits_{x \to k^+} f(x) = k + \sqrt{k-k} = k$.

Donc finalement, f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 81 :

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $a < b$. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ telles que $f(a) = g(b)$ et $g(a) = f(b)$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Correction :

Posons $h = f - g$. h est continue car f et g le sont. $h(a) = f(a) - f(b) = -h(b)$ donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a,b]$, $h(c) = 0$ donc $f(c) = g(c)$.

Exercice 82 :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et une fonction f définie sur $[a, b]$, telle que :

$$f([a,b]) \subset [a,b] \quad \text{et} \quad \forall (x,y) \in [a,b]^2, x \neq y \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < |x - y|.$$

1. Montrer que f admet ***au plus*** un point fixe.
2. Montrer que f est continue sur $[a, b]$.
3. En déduire que f possède un unique point fixe.
4. (a) Montrer qu'il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que, pour tout $x \in [a, b]$, $|f(x) - x| \geqslant |f(\alpha) - \alpha|$.
   (b) En déduire que α est l'unique point fixe de f.

Correction :

1. On raisonne par l'absurde : supposons qu'il existe $(x_1, x_2) \in [a, b]^2$ tel que $x_1 \neq x_2$, $f(x_1) = x_1$ et $f(x_2) = x_2$. Alors $|x_1 - x_2| = |f(x_1) - f(x_2)| < |x_1 - x_2|$ ce qui est une contradiction. Donc f possède au plus un point fixe.
2. Montrons d'abord que f est continue sur $[a, b]$. Soient $x \in [a, b]$ et $\varepsilon > 0$. Remarquons alors que $|x - y| \leq \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ ce qui est la définition de la continuité de f en x.
3. Comme $f([a, b]) \subset [a, b]$, $x \mapsto f(x) - x$ est positive en a, négative en b et continue par 2. Donc la fonction s'annule donc f possède au moins un point fixe et par 1, il est unique.
4. (a) Par somme et composée, la fonction $g : x \mapsto |f(x) - x|$ est continue sur $[a, b]$. g est donc continue sur un segment, elle est donc minorée et la borne inférieure est atteinte donc il existe $\alpha \in [a, b]$, pour tout $x \in [a, b]$, $g(x) \geq g(\alpha)$.
   (b) Si $f(\alpha) \neq \alpha$ alors $|f(\alpha) - \alpha| > 0$ et on aurait $\forall x \in [a, b]$, $|f(x) - x| > 0$ ce qui contredit l'existence d'un point fixe. Donc α est un point fixe et l'unique par 3.

Exercice 83 :

Étant donné $a \in \mathbb{R}$, déterminer le degré et le coefficient dominant de $(2X + 1)^{2020} - (4X^2 + aX)^{1010}$.

Correction :

— Remarquons tout d'abord que par somme et produit, $deg((2X + 1)^{2020} - (4X^2 + aX)^{1010}) \leq 2020$.

— Calculons alors le terme devant X^{2020}. Dans le premier membre, la formule du binôme donne pour seul terme 2^{2020}. Dans le second membre, la même formule donne $4^{1010} = 2^{2020}$ donc finalement le coefficient devant X^{2020} est nul.

— Calculons alors le terme devant X^{2019}. Dans le premier membre, la formule du binôme donne pour seul terme $2020 \times 2^{2019} = 1010 \times 2^{2020}$. Dans le second membre, la même formule donne $1010 \times 4^{1009} a = 1010 \times 2^{2018} a$. Donc, si $a \neq 4$, le degré de $(2X + 1)^{2020} - (4X^2 + aX)^{1010}$ est 2019 et son coefficient dominant est $1010 \times 2^{2018}(4 - a)$ sinon le coefficient est nul et on continue.

— Si $a = 4$, on obtient $(2X + 1)^{2020} - (4X)^{1010}(X + 1)^{1010}$. Calculons alors le terme devant X^{2018}. Dans le premier membre, la formule du binôme donne pour seul terme $\frac{2020 \times 2019}{2} \times 2^{2018}$. Dans le second membre, la même formule donne $\frac{1010 \times 1009}{2} 4^{1010} = 1010 \times 1009 \times 2^{2019}$. Par différence, on obtient alors $1010 \times 2^{2018}(2019 - 2018) = 1010 \times 2^{2018}$ donc le degré de $(2X + 1)^{2020} - (4X^2 + 4X)^{1010}$ est 2018 et son coefficient dominant est 1010×2^{2018}.

Exercice 84 :

1. Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$.
2. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(P) = P$

On commencera par s'intéresser au degré d'un polynôme solution dans chaque cas.

Correction :

1. Raisonnons par analyse-synthèse.
   — Soit P un polynôme solution. $P = 0$ est solution sinon la formule de produit et composée des degrés donne $2deg(P) = deg(P) + 2$ donc $deg(P) = 2$. P est alors de la forme $aX^2 + bX + c$ avec $a \neq 0$. Substituons alors dans l'équation : $aX^4 + bX^2 + c = aX^4 + bX^3 + (a+c)X^2 + bX + c$ ce qui donne finalement $b = 0$ et $c = -a$ donc $P \in \{a(X^2-1)|a \in \mathbb{C}\}$.
   — Les polynômes de cet ensemble étant clairement solution, $\boxed{S = \{a(X^2-1)|a \in \mathbb{C}\}}$.
2. Raisonnons par analyse-synthèse.
   — Soit P un polynôme solution. Les polynômes constants sont clairement solutions sinon la formule de composée des degrés donne $deg(P)^2 = deg(P)$ donc $deg(P) = 1$. P est alors de la forme $aX + b$ avec $a \neq 0$. Substituons alors dans l'équation : $a^2X + ab + b = aX + b$ ce qui donne finalement $b = 0$ et $a = 1$ donc $P \in \mathbb{R}_0[X] \cup \{X\}$.
   — Les polynômes de cet ensemble étant clairement solution, $\boxed{S = \mathbb{R}_0[X] \cup \{X\}}$.

Exercice 85 :

Effectuer, dans les cas suivants, la division euclidienne de A par B :

1. $A = 2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6$; $B = X^2 - 3X + 1$.
2. $A = 2X^5 - 5X^3 - 8X$; $B = X + 3$.

Correction :

1. On applique l'algorithme de la division euclidienne et on obtient $Q = 2X^2 + 3X + 11$ et $R = 25X - 5$.
2. On applique l'algorithme de la division euclidienne et on obtient $Q = 2X^4 - 6X^3 + 13X^2 - 39X + 109$ et $R = -327$.

Exercice 86 :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X \sin\alpha + \cos\alpha)^n$ par $X^2 + 1$.

Correction :

Remarquons tout d'abord que le reste de la division euclidienne de $(X \sin\alpha + \cos\alpha)^n$ par $X^2 + 1$ est de degré inférieur ou égale à 1. Donc notons R_n ce reste, $R_n = a_nX + b_n$. Et on a $(X \sin\alpha + \cos\alpha)^n = (X^2+1)Q_n + R_n$. Substituons à X les valeurs i et $-i$, on obtient $b_n + a_ni = e^{in\alpha}$ et $b_n - a_ni = e^{-in\alpha}$ donc $b_n = \cos(n\alpha)$ et $a_n = \sin(n\alpha)$ donc finalement le reste de la division euclidienne de $(X \sin\alpha + \cos\alpha)^n$ par $X^2 + 1$ est $\sin(n\alpha)X + \cos(n\alpha)$.

Exercice 87 :

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X(X+1)(2X+1)$ divise $(X+1)^{2n} - X^{2n} - 2X - 1$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(X^2+X+1)^2$ divise $(X+1)^{6n+1} - X^{6n+1} - 1$.

Correction :

1. Comme X, $X+1$ et $2X+1$ sont premiers entre eux (polynômes de degré 1 avec racines distinctes) il faut et il suffit de montrer que chacun de ces trois polynômes divise $(X+1)^{2n} - X^{2n} - 2X - 1$. C'est donc équivalent à montrer que 0, -1 et $-\frac{1}{2}$ sont racines de $(X+1)^{2n} - X^{2n} - 2X - 1$ ce qui se vérifie sans mal.
2. $X^2 + X + 1 = (X-j)(X-\overline{j})$ donc montrer que $(X^2+X+1)^2$ divise $(X+1)^{6n+1} - X^{6n+1} - 1$ est équivalent à montrer que j et $\overline{j}$ sont racines au moins double de $(X+1)^{6n+1} - X^{6n+1} - 1$. Or ce polynôme étant à coefficients réels, on sait que la multiplicité de j et $\overline{j}$ en tant que racine est la même donc finalement il reste juste à montrer que, en posant $P = (X+1)^{6n+1} - X^{6n+1} - 1$, $P(j) = P'(j) = 0$. Comme $1 + j + j^2 = 0$ et $j^3 = 1$
   $P(j) = (j+1)^{6n+1} - j^{6n+1} - 1 = ((-j^2)^6)^n \times (-j)^2 - (j^6)^n \times j - 1 = -j^2 - j - 1 = 0$.
   $P'(j) = (6n+1)[(j+1)^{6n} - j^{6n}] = 0$.

Exercice 88 :

Soient $(m,n)\in\mathbb{C}^2$ et $P=X^4+4X^3+mX^2+nX+2$.

1. Déterminer m et n pour que -1 soit une racine au moins double de P.
2. Décomposer alors P dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Correction :

1. On veut $P(-1)=P'(-1)=0$ ce qui donne le système : $\begin{cases} m-n=1 \\ -2m+n=-8 \end{cases}$ donc $m=7$ et $n=6$.
2. On sait alors que $X^4+4X^3+7X^2+6X+2$ est divisible par $(X+1)^2$. On fait la division et on obtient : $X^4+4X^3+7X^2+6X+2=(X+1)^2(X^2+2X+2)=(X+1)^2(X+1-i)(X+1+i)$. La décomposition dans $\mathbb{C}$ est $(X+1)^2(X+1-i)(X+1+i)$ et celle dans $\mathbb{R}$ est $(X+1)^2(X^2+2X+2)$.

Exercice 89 :

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$: X^4+4, X^6+27, X^8+X^4+1.

Correction :

— On résoud $X^4=-4$ donc on trouve les racines quatrièmes de -4, ce qui donne
$X^4+4=(X-\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})(X-\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}})(X-\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})(X-\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}})$ qui est la décomposition dans $\mathbb{C}$.
En regroupant les conjugués, on obtient $(X^2-2\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4})+2)(X^2-4\cos(\frac{3\pi}{4})+2)=(X^2-2X+2)(X^2+2X+2)$ qui est la décomposition dans $\mathbb{R}$.

— On applique exactement la même méthode avec les racines 6-ième de -27, ce qui donne
$X^6+27=(X-\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}})(X-\sqrt{3}i)(X-\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}})(X-\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}})(X+\sqrt{3}i)(X-\sqrt{3}e^{-i\frac{5\pi}{6}})$ qui est la décomposition dans $\mathbb{C}$. En regroupant les conjugués, on obtient $X^6+27=(X^2-3X+3)(X^2+3)(X^2+3X+3)$ qui est la décomposition dans $\mathbb{R}$.

— On résoud $X^8+X^4+1=0$ en posant $Y=X^4$ ce qui donne $Y=e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}$. Ce qui donne finalement,
$X^8+X^4+1=(X-e^{i\frac{\pi}{6}})(X-e^{i\frac{2\pi}{3}})(X-e^{-i\frac{\pi}{3}})(X-e^{-i\frac{5\pi}{6}})(X-e^{-i\frac{\pi}{6}})(X-e^{-i\frac{2\pi}{3}})(X-e^{i\frac{\pi}{3}})(X-e^{i\frac{5\pi}{6}})$ qui est la décomposition dans $\mathbb{C}$. En regroupant les conjugués, on obtient
$X^8+X^4+1=(X^2-\sqrt{3}X+1)(X^2+X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1)(X^2-X+1)$ qui est la décomposition dans $\mathbb{R}$.

Exercice 90 :

Étant donné un réel α strictement positif, on note f_α la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f_\alpha(x)=x^\alpha\ln(x)$.

1. Montrer que f_α est prolongeable par continuité en 0.
   On note encore f_α son prolongement.
2. Étudier la dérivabilité de f_α.

Correction :

1. f_α est continue sur $]0;+\infty[$ par théorème opératoire. De plus, par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to 0} f_\alpha(x)=0$ donc f_α est prolongeable par continuité en 0 en posant $f_\alpha(0)=0$.
2. f_α est dérivable sur $]0;+\infty[$ par théorème opératoire. De plus, pour tout $x>0$, $\frac{f_\alpha(x)-f_\alpha(0)}{x-0}=x^{\alpha-1}\ln(x)$.
   Donc, si $\alpha\in]0;1]$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f_\alpha(x)-f_\alpha(0)}{x-0}=-\infty$ et f_α n'est pas dérivable en 0.
   Si $\alpha>1$, par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f_\alpha(x)-f_\alpha(0)}{x-0}=0$ et f_α est donc dérivable en 0 avec $f'_\alpha(0)=0$.

Exercice 91 :

Soit f une fonction définie sur $[0,1]$, dérivable, et vérifiant $f(0) = f(1) = 0$ et $f'(0) = 0$.

On considère alors la fonction g définie sur $]0,1]$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

1. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0.
2. Montrer qu'il existe $c \in]0,1]$ tel que $f'(c) = \frac{f(c)}{c}$.
   Donner une interprétation graphique de ce résultat.

Correction :

1. g est continue sur $]0;1]$ par théorème opératoire. De plus, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = 0$ donc g est prolongeable par continuité en 0 en posant $g(0) = 0$.
2. g est continue sur $[0;1]$, dérivable sur $]0;1[$ par théorème opératoire, $g(0) = g(1) = 0$ donc, par le théorème de Rolle, il existe $c \in]0;1[$ tel que $g'(c) = 0$. Or, pour tout $x \in]0;1[$, $g'(x) = \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$ donc on a
   $g'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(c)}{c}$.
   Remarquons enfin que $f'(c)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point de coordonnées $(c, f(c))$ alors que $\frac{f(c)}{c}$ est le coefficient directeur de la droite passant par O et le point de coordonnées $(c, f(c))$. Donc finalement, ce résultat signifie qu'il existe une tangente à la courbe qui passe par l'origine.

Exercice 92 :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
Montrer que, si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, alors f est lipschitzienne sur $[a,b]$.

Correction :

Remarquons tout d'abord que, comme f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, f' est continue sur $[a,b]$ donc f' est bornée et atteint ses bornes. Donc $\exists M > 0$, $\forall c \in [a,b]$, $|f'(c)| \leq M$.
Soit $(x,y) \in [a,b]^2$ avec $x < y$, on applique l'inégalité des accroissements finies, on obtient $|f(y) - f(x)| \leq M|y-x|$.
Comme ce résultat est vrai pour tout x et y, f est M-lipschitzienne.

Exercice 93 :

Calculer les développements limités suivants :

1. $\dfrac{\ln(x)}{x}$ en 1, à l'ordre 4 ;
2. $\dfrac{x-\sin(x)}{1-\cos(x)}$ en 0 à l'ordre 3 ;
3. $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ en 0, à l'ordre 3 ;
4. $\ln\left(1+\sqrt{1+x}\right)$ en 0 à l'ordre 3 ;
5. $\ln(3\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})$ en 0 à l'ordre 3 ;

Correction :

1. On commence par poser $x=1+h$, $\frac{\ln(x)}{x}=\ln(1+h)\frac{1}{1+h}$ On fait alors le DL à l'ordre 4 de chaque terme : $\ln(1+h)=h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}-\frac{h^4}{4}+o_0(h^4)$ et $\frac{1}{1+h}=1-h+h^2-h^3+h^4+o_0(h^4)$.
   On fait maintenant le produit : $\ln(1+h)\frac{1}{1+h}=h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}-\frac{h^4}{4}-h^2+\frac{h^3}{2}-\frac{h^4}{3}+h^3-\frac{h^4}{2}-h^4+o_0(h^4)$ $=h-\frac{3h^2}{2}+\frac{11h^3}{6}-\frac{25h^4}{12}+o_0(h^4)$. (Remarquons que comme le premier terme du logarithme est h, on aurait pu faire juste le DL à l'ordre 3 du deuxième terme).
   Finalement, $\frac{\ln(x)}{x}=(x-1)-\frac{3}{2}(x-1)^2+\frac{11}{3}(x-1)^3-\frac{25}{12}(x-1)^4+o_1((x-1)^4)$.
2. Remarquons tout d'abord que comme le premier terme de $1-\cos(x)$ est de l'ordre de x^2, il faut faire le DL à l'ordre 5. $x-\sin(x)=\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{120}+o_0(x^5)$ et $1-\cos(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o_0(x^5)$ donc $\frac{x-\sin(x)}{1-\cos(x)}=(\frac{x}{3}-\frac{x^3}{60}+o_0(x^3))\frac{1}{1-\frac{x^2}{12}+o_0(x^3)}$ or $\frac{1}{1-\frac{x^2}{12}+o_0(x^3)}=1+\frac{x^2}{12}+o_0(x^3)$ donc par produit, $\frac{x-\sin(x)}{1-\cos(x)}=\frac{x}{3}+\frac{x^3}{90}+o_0(x^3)$.
3. $(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$, on fait donc d'abord le DL à l'ordre 3 de $\frac{\ln(1+x)}{x}$ et il faut donc le DL à l'ordre 4 de $\ln(1+x)$: $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o_0(x^4)$ donc $\frac{\ln(1+x)}{x}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o_0(x^3)$ et $(1+x)^{\frac{1}{x}}=ee^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o_0(x^3)}$.
   Donc par composée, $(1+x)^{\frac{1}{x}}=e(1+(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4})+\frac{(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4})^2}{2}+\frac{(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4})^3}{6}+o_0(x^3))$. On ne garde alors que les termes d'ordre inférieur ou égal à 3. $(1+x)^{\frac{1}{x}}=e-\frac{ex}{2}+\frac{11ex^2}{24}-\frac{7ex^3}{16}+o_0(x^3)$.
4. On a $\sqrt{(1+x)}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+o_0(x^3)$ donc $\ln(1+\sqrt{1+x})=\ln(2+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+o_0(x^3))$ $=\ln(2)+\ln(1+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{16}+\frac{x^3}{32}+o_0(x^3))$. Par composition, on obtient $\ln(1+\sqrt{1+x})=\ln(2)-(\frac{x}{4}-\frac{x^2}{16}+\frac{x^3}{32})+\frac{(\frac{x}{4}-\frac{x^2}{16}+\frac{x^3}{32})^2}{2}-\frac{(\frac{x}{4}-\frac{x^2}{16}+\frac{x^3}{32})^3}{3}+o_0(x^3)$. On ne garde alors que les termes d'ordre inférieur ou égal à 3. $\ln(1+\sqrt{1+x})=\ln(2)-\frac{x}{4}+\frac{3x^2}{16}-\frac{10x^3}{192}+o_0(x^3)$.
5. On a $3e^x+e^{-x}=3(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6})+1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o_0(x^3)=4+2x+2x^2+\frac{x^3}{3}+o_0(x^3)$.
   Donc $\ln(3e^x+e^{-x})=\ln(4)+\ln(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{12}+o_0(x^3))$. Par composée, on obtient, $\ln(3e^x+e^{-x})=\ln(4)+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{12}-\frac{(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{12})^2}{2}+\frac{(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{12})^3}{3}+o_0(x^3)$. On ne garde alors que les termes d'ordre inférieur ou égal à 3. $\ln(3e^x+e^{-x})=\ln(4)+\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}-\frac{x^3}{8}+o_0(x^3)$.

Exercice 94 :

Déterminer les limites (éventuelles) des expressions suivantes :

1. $\dfrac{1}{\sin^2(x)} - \dfrac{1}{x^2}$ en 0 ;
2. $\dfrac{\sqrt[3]{1+3x} - \mathrm{e}^x}{x^2}$ en 0 ;
3. $x^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}} - \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)$ en $+\infty$;
4. $\dfrac{1}{1-x^x} + \dfrac{1}{x\ln(x)}$ en 0.

__Correction__ :

1. $\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-\sin^2(x)}{x^2\sin^2(x)}$. On a $x^2\sin^2(x) \sim_0 x^4$ donc il faut faire un DL à l'ordre 4 du numérateur. $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^4)$ donc $\sin^2(x) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o_0(x^4)$ donc $x^2 - \sin^2(x) \sim_0 \frac{x^4}{3}$ donc finalement, par quotient, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3}$.
2. Le dénominateur est x^2 donc il faut faire un DL à l'ordre 2 du numérateur. $\sqrt[3]{1+3x} = 1 + \frac{3x}{3} - \frac{(3x)^2}{9} + o_0(x^2)$ donc $\sqrt[3]{1+3x} - e^x = -\frac{3x^2}{2} + o_0(x^2)$ donc par quotient, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x}-\mathrm{e}^x}{x^2} = -\frac{3}{2}$.
3. On pose d'abord $h = \frac{1}{x}$, $x^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}} - \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{h}{1+h}} - \mathrm{e}^h}{h^2}$. Comme le dénominateur est h^2, il faut faire un DL à l'ordre 2 en 0 du numérateur. $\frac{h}{1+h} = h(1-h+o_0(h)) = h - h^2 + o_0(h^2)$. Donc $\mathrm{e}^{\frac{h}{1+h}} = 1 + h - h^2 + \frac{(h-h^2)^2}{2} + o_0(h^2)$ $= 1 + h - \frac{h^2}{2} + o_0(h^2)$ donc $\mathrm{e}^{\frac{h}{1+h}} - \mathrm{e}^h \sim_0 -h^2$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}} - \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right) = -1$.
4. On pose le changement de variable $y = x\ln(x)$ pour $x > 0$ avec $\lim\limits_{x\to 0} y = 0$ par croissance comparée. On cherche donc la limite (éventuelle) en 0 de $\frac{1}{1-e^y} + \frac{1}{y} = \frac{1+y-e^y}{y(1-e^y)}$. On a $y(1-e^y) \sim_0 -y^2$ donc un DL à l'ordre 2 suffit. On a $1 + y - e^y = -\frac{y^2}{2} + o(y^2)$ donc finalement $\frac{1+y-e^y}{y(1-e^y)} \sim_0 \frac{-\frac{y^2}{2}}{-y^2} = \frac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{1-x^x} + \frac{1}{x\ln(x)} = \frac{1}{2}$.

Exercice 95 :

Les ensembles décrits ci-dessous sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

1. $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x = y\}$.
2. $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x + y - 2z = 3x - y + z = 0\}$.
3. $E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x \leqslant y\}$.
4. $E_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x + y - 2z = 1\}$.

__Correction__ :

1. — $E_1 \subset \mathbb{R}^3$.
   — $0_{R^3} = (0,0,0) \in E_1$.
   — Soient $(\lambda,\mu) \in R^2$, $(x_1,y_1,z_1) \in E_1$, $(x_2,y_2,z_2) \in E_1$, on a $x_1 = y_1$ et $x_2 = y_2$ donc $\lambda x_1 + \mu x_2 = \lambda y_1 + \mu y_2$. Donc $\lambda(x_1,y_1,z_1) + \mu(x_2,y_2,z_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2) \in E_1$.

   Donc E_1 est bien un sous espace vectoriel de R^3.
2. — $E_2 \subset \mathbb{R}^3$.
   — $0_{R^3} = (0,0,0) \in E_2$.
   — Soient $(\lambda,\mu) \in R^2$, $(x_1,y_1,z_1) \in E_2$, $(x_2,y_2,z_2) \in E_2$, on a $x_1 + y_1 - 2z_1 = 3x_1 - y_1 + z_1 = 0$ et $x_2 + y_2 - 2z_2 = 3x_2 - y_2 + z_2 = 0$.
   De plus, posons $(x_3,y_3,z_3) = \lambda(x_1,y_1,z_1) + \mu(x_2,y_2,z_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2)$.
   On a $x_3 + y_3 - 2z_3 = \lambda x_1 + \mu x_2 + \lambda y_1 + \mu y_2 - 2(\lambda z_1 + \mu z_2) = \lambda(x_1 + y_1 - 2z_1) + \mu(x_2 + y_2 - 2z_2) = 0$ et $3x_3 - y_3 + z_3 = 3(\lambda x_1 + \mu x_2) - (\lambda y_1 + \mu y_2) + \lambda z_1 + \mu z_2 = \lambda(3x_1 - y_1 + z_1) + \mu(3x_2 - y_2 + z_2) = 0$ donc $(x_3,y_3,z_3) \in E_2$.

   Donc E_2 est bien un sous espace vectoriel de R^3.
3. On a $(0,1,0) \in E_3$ mais $-(0,1,0) = (0,-1,0) \notin E_3$ donc E_3 n'est pas un sous espace vectoriel de R^3.
4. $0_{R^3} = (0,0,0) \notin E_4$ donc E_4 n'est pas un sous espace vectoriel de R^3.

Exercice 96 :
Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x + y - z = 0\}$ et $G = \{(a - b, a + b, a - 3b)\,;\, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de $F \cap G$.

Correction :

1. Pour F :
   — $F \subset \mathbb{R}^3$.
   — $0_{R^3} = (0, 0, 0) \in F$.
   — Soient $(\lambda, \mu) \in R^2$, $(x_1, y_1, z_1) \in F$, $(x_2, y_2, z_2) \in F$, on a $x_1 + y_1 - z_1 = 0$ et $x_2 + y_2 - z_2 = 0$.
   De plus, posons $(x_3, y_3, z_3) = \lambda(x_1, y_1, z_1) + \mu(x_2, y_2, z_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2)$.
   On a $x_3 + y_3 - z_3 = \lambda x_1 + \mu x_2 + \lambda y_1 + \mu y_2 - (\lambda z_1 + \mu z_2) = \lambda(x_1 + y_1 - z_1) + \mu(x_2 + y_2 - z_2) = 0$ donc $(x_3, y_3, z_3) \in F$.

   Donc F est bien un sous espace vectoriel de R^3.

   Pour G :
   $G = \{(a - b, a + b, a - 3b)\,;\, (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \{a(1, 1, 1) + b(-1, 1, -3)\,;\, (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \vec{(}(1, 1, 1), (-1, 1, -3))$ donc G est un sous espace vectoriel engendré de R^3.
2. — Soit $(x, y, z) \in F \cap G$ alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $x = a - b$, $y = a + b$ et $z = a - 3b$.
   De plus, $x + y - z = a - b + a + b - (a - 3b) = a + 3b = 0$ donc $a = -3b$ et $(x, y, z) = b(-4, -2, -6)$ donc $F \cap G \subset \mathrm{Vect}((-4, -2, -6))$.
   — Clairement $(-4, -2, -6) \in F \cap G$ (en prenant $b = 1$ et $a = -3$) et $F \cap G$ est un sev de $\mathbb{R}^3$ par intersection de deux sev de $\mathbb{R}^3$ donc $\mathrm{Vect}((-4, -2, -6)) \subset F \cap G$ et finalement $\mathrm{Vect}((-4, -2, -6)) = F \cap G$.
   — Enfin, par construction, $(-4, -2, -6)$ est générateur de $F \cap G$. De plus, ce vecteur étant non nul, $(-4, -2, -6)$ est libre. Donc c'est une base de $F \cap G$.

Exercice 97 :
Les familles suivantes des $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ou liées ?

1. $\vec{x_1} = (1, 1, 0)$, $\vec{x_2} = (0, 1, 1)$;
2. $\vec{x_1} = (0, 0, 1)$, $\vec{x_2} = (0, 1, 1)$, $\vec{x_3} = (1, 1, 1)$;
3. $\vec{x_1} = (0, 1, -1)$, $\vec{x_2} = (1, 0, -1)$, $\vec{x_3} = (1, -1, 0)$.

Correction :

1. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 = 0$ alors $\lambda_1 = 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ et $\lambda_2 = 0$ donc $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ est libre.
2. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \lambda_3 \vec{x}_3 = 0$ alors $\lambda_3 = 0$, $\lambda_2 + \lambda_3 = 0$ et $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ et $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ est libre.
3. On a $\vec{x}_3 = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$ donc $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ est liée.

Exercice 98 :

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $\vec{u} = (1, -1, 2)$, $\vec{v} = (1, 2, 3)$ et $\vec{w} = (1, -4, 1)$.

1. La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est-elle libre ?
2. La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?
3. On note $F = \text{Vect}\,(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
   (a) Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de F.
   (b) Déterminer les coordonnées de $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

Correction :

1. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1\vec{u} + \lambda_2\vec{v} + \lambda_3\vec{w} = 0$ alors $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$ donc $(0, 0, 0)$ n'est pas l'unique solution et la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est liée. (On aurait aussi pu remarquer tout de suite que $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$)
2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, cherchons $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1\vec{u} + \lambda_2\vec{v} + \lambda_3\vec{w} = (a, b, c)$ alors $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 - 4\lambda_3 = b \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a \\ \lambda_2 - \lambda_3 = \frac{a+b}{3} \\ \lambda_2 - \lambda_3 = c - 2a \end{cases}$ donc si $\frac{a+b}{3} \neq c - 2a$, il n'y a pas de solution donc, par exemple, $(1, 2, 2) \notin \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ donc $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$.
3. (a) Comme $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$ alors $F = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ donc $(\vec{u}, \vec{v})$ est génératrice de F. De plus, les deux vecteurs sont non colinéaires donc $(\vec{u}, \vec{v})$ est libre et c'est donc une base de F.
   (b) Par les questions précédentes, on obtient $\vec{u} = (1, 0)$, $\vec{v} = (0, 1)$ et $\vec{w} = (2, -1)$.

Exercice 99 :

On considère les polynômes $P = X$, $Q = X - 1$ et $R = 3X^2$.

1. Dans $\mathbb{R}_2[X]$, la famille (P, Q, R) est-elle libre ? génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$? une base de $\mathbb{R}_2[X]$?
2. Répondre aux mêmes questions en considérant (P, Q, R) en tant que famille de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Donner les coordonnés de $S = 6X^2 - X + 1$ dans la base (P, Q, R).

Correction :

1. — Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 P + \lambda_2 Q + \lambda_3 R = 0$ alors, en regardant chaque coefficient, on obtient $\begin{cases} -\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$ donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ donc la famille (P, Q, R) est libre.
   — Soit $aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, cherchons $\lambda_1 P + \lambda_2 Q + \lambda_3 R = aX^2 + bX + c$, on obtient $\begin{cases} -\lambda_2 = c \\ \lambda_1 + \lambda_2 = b \\ 3\lambda_3 = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -c \\ \lambda_1 = b + c \\ \lambda_3 = \frac{a}{3} \end{cases}$. Il y a bien une solution pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ donc la famille (P, Q, R) est génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.
   — La famille (P, Q, R) est libre et génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$, c'est donc une base.
2. — Tous les calculs restent justes donc la famille (P, Q, R) est libre. (La liberté d'une famille ne dépend pas de l'espace dans lequel on regarde tant que cela reste un $\mathbb{K}$-ev avec $\mathbb{K}$ fixe).
   — $X^3 \notin \text{Vect}(P, Q, R) = \mathbb{R}_2[X]$ donc la famille (P, Q, R) n'est pas génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$.
   — Comme la famille (P, Q, R) n'est pas génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$, ce n'est pas une base.
3. En utilisant la question 1), les coordonnées de $6X^2 - X + 1$ dans (P, Q, R) sont $(0, -1, 2)$.

Exercice 100 :

1. Soit $F \in \mathbb{R}(X)$, d'écriture irréductible $F = \frac{P}{Q}$, et vérifiant $F' = \frac{1}{X}$.
   (a) Montrer que X divise Q.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $X^n \mid Q$.
   Montrer que $X^n \mid Q'$.
2. Déduire de ce qui précède que le logarithme népérien n'est pas une fonction rationnelle.

Correction :

1. (a) On sait que $F' = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}$ donc on obtient $X(P'Q - PQ') = Q^2$ donc X divise Q^2 et comme X est irréductible, X divise Q.
   (b) Écrivons $Q = X^n R$ et réinjectons dans l'équation précédente, on obtient $X(P'X^n R - PQ') = X^{2n}R^2$ donc $PQ' = X^n(P'R - X^{n-1}R^2)$. Donc X^n divise PQ' or $P \wedge Q = 1$ et $X|Q$ donc $P \wedge X^n = 1$ donc, d'après le lemme de Gauss, $X^n|Q'$.
2. Raisonnons par l'absurde, supposons qu'il existe P et $Q \neq 0$ tels $P \wedge Q = 1$ et $\ln = \frac{P}{Q}$. Par les questions précédentes, on a $X|Q$ donc $X|Q'$ mais alors 0 est racine au moins double de Q donc $X^2|Q$. On montre alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X^n|Q$ ce qui est possible que pour $Q = 0$ ce qui est une contradiction.

Exercice 101 :

Effectuer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ des fractions rationnelles suivantes :

1. $\dfrac{9X^2 - 16X + 4}{X^3 - 3X^2 + 2X}$
2. $\dfrac{X+4}{X^2(X^2-1)}$
3. $\dfrac{X^4}{X^3 - 1}$
4. $\dfrac{X^2+1}{(X-1)^6}$
5. $\dfrac{X^6}{(X^2+1)^2(X+1)^2}$
6. $\dfrac{X^4+1}{X^4+X^2+1}$

Correction :

1. $\dfrac{9X^2 - 16X + 4}{X^3 - 3X^2 + 2X} = \dfrac{3}{X-1} + \dfrac{2}{X} + \dfrac{4}{X-2}$.
2. $\dfrac{X+4}{X^2(X^2-1)} = \dfrac{-4}{X^2} + \dfrac{-1}{X} + \dfrac{-3/2}{X+1} + \dfrac{5/2}{X-1}$.
3. $\dfrac{X^4}{X^3-1} = X + \dfrac{1/3}{X-1} + \dfrac{\frac{1}{3}(1-X)}{X^2+X+1}$.
4. $\dfrac{X^2+1}{(X-1)^6} = \dfrac{1}{(X-1)^4} + \dfrac{2}{(X-1)^5} + \dfrac{2}{(X-1)^6}$.
5. $\dfrac{X^6}{(X^2+1)^2(X+1)^2} = 1 + \dfrac{-1}{X+1} + \dfrac{1/4}{(X+1)^2} + \dfrac{-X-1/4}{X^2+1} + \dfrac{X/2}{(X^2+1)^2}$.
6. $\dfrac{X^4+1}{X^4+X^2+1} = 1 + \dfrac{-X/2}{X^2-X+1} + \dfrac{X/2}{X^2+X+1}$.

Exercice 102 :

Calculer une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x^3+1}$ et une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x^4+1}$.

Correction :

$\frac{1}{X^3+1} = \frac{1/3}{X+1} + \frac{2-X}{3(X^2-X+1)} = \frac{1/3}{X+1} - \frac{1}{6}\frac{2X-1}{X^2-X+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(X-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{1/3}{X+1} - \frac{1}{6}\frac{2X-1}{X^2-X+1} + \frac{2}{3}\frac{1}{1+\left(\frac{2X}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$.

On obtient donc comme primitive de $x \longmapsto \frac{1}{x^3+1}$, $x \longmapsto \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

$\frac{1}{X^4+1} = \frac{-1}{2\sqrt{2}}\frac{X-\sqrt{2}}{X^2-\sqrt{2}X+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{X+\sqrt{2}}{X^2+\sqrt{2}X+1} = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$ donc on obtient donc comme primitive de $x \longmapsto \frac{1}{x^3+1}$,
$x \longmapsto \frac{\sqrt{2}}{8}\ln(x^2+\sqrt{2}x+1) + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\sqrt{2}}{8}\ln(x^2-\sqrt{2}x+1) + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$.

Exercice 103 :

Dans les cas suivants, l'application f est-elle linéaire ?

Si c'est le cas, on déterminera une base du noyau et de l'image de f.

1. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 ; (x, y, z) \longmapsto (x + 2y + z, x - y - z, x + 5y + 3z)$;
2. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} ; (x, y) \longmapsto xy$;
3. $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R} ; (x, y, z, t) \longmapsto x + y + z + t$.

Correction :

1. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^6$,
$f(\lambda(x_1, y_1, z_1) + \mu(x_2, y_2, z_2)) = f(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2) =$
$(\lambda x_1+\mu x_2+2(\lambda y_1+\mu y_2)+\lambda z_1+\mu z_2, \lambda x_1+\mu x_2-(\lambda y_1+\mu y_2)-(\lambda z_1+\mu z_2), \lambda x_1+\mu x_2+5(\lambda y_1+\mu y_2)+3(\lambda z_1+\mu z_2)) =$
$\lambda(x_1 + 2y_1 + z_1, x_1 - y_1 - z_1, x_1 + 5y_1 + 3z_1) + \mu(x_2 + 2y_2 + z_2, x_2 - y_2 - z_2, x_2 + 5y_2 + 3z_2) =$
$\lambda f(x_1, y_1, z_1) + \mu f(x_2, y_2, z_2)$ donc f est linéaire.
$\mathrm{Ker}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | f(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$, on résoud donc $\left\{\begin{array}{l} x + 2y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ x + 5y + 3z = 0 \end{array}\right.$.
On obtient alors $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(1, -2, 3)$.
$\mathrm{Im}(f) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 | \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (a, b, c)\}$, on cherche donc (a, b, c) tel que
$\left\{\begin{array}{l} x + 2y + z = a \\ x - y - z = b \\ x + 5y + 3z = c \end{array}\right.$ possède des solutions. $\left\{\begin{array}{l} x + 2y + z = a \\ x - y - z = b \\ x + 5y + 3z = c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + 2y + z = a \\ 3y + 2z = a - b \\ 0 = b + c - 2a \end{array}\right.$.
Donc $\mathrm{Im}(f) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 | b + c - 2a = 0\} (= \mathrm{Vect}((1, 0, 2), (0, 1, -1)))$.
2. $f(2, 2) = 4 = 4f(1, 1)$ donc f n'est pas linéaire.
3. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(x_1, y_1, z_1, t_1, x_2, y_2, z_2, t_2) \in \mathbb{R}^8$,
$f(\lambda(x_1, y_1, z_1, t_1) + \mu(x_2, y_2, z_2, t_2)) = f(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2, \lambda t_1 + \mu t_2) =$
$\lambda x_1 + \mu x_2 + \lambda y_1 + \mu y_2 + \lambda z_1 + \mu z_2 + \lambda t_1 + \mu t_2 = \lambda f(x_1, y_1, z_1, t_1) + \mu f(x_2, y_2, z_2, t_2)$ donc f est linéaire.
$\mathrm{Ker}(f) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + y + z + t = 0\} = \mathrm{Vect}((1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1))$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Exercice 104 :

On considère l'application ψ définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $\psi(P) = (2X - 1)P - \left(X^2 - \frac{1}{2}\right) P'$.

1. Montrer que ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Étudier l'injectivité et la surjectivité de ψ.

Correction :

1. — Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P, Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2$,
$\psi(\lambda P + \mu Q) = (2X - 1)(\lambda P + \mu Q) - \left(X^2 - \frac{1}{2}\right) (\lambda P + \mu Q)') = \lambda\psi(P) + \mu\psi(Q)$ donc ψ est linéaire.
— Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $P = aX^2 + bX + c$ et
$\psi(P) = 2aX^3 + 2bX^2 + 2cX - aX^2 - bX - c - 2aX^3 - bX^2 + aX + \frac{b}{2} = (b - a)X^2 + (2c - b + a)X + \frac{b}{2} - c$.
Donc $\psi(P) \in \mathbb{R}_2[X]$ et ψ est bien un endomorphisme.
2. — $\mathrm{Ker}(\psi) = \{P \in \mathbb{R}_2[X] | \psi(P) = 0\}$ et d'après la question précédente, on obtient $\left\{\begin{array}{l} b - a = 0 \\ 2c - b + a = 0 \\ \frac{b}{2} - c = 0 \end{array}\right.$. Donc
$\mathrm{Ker}(\psi) = \{0\}$ et ψ est injective.
— Le système carré précédent possédant une unique solution, il est de Cramer, il possède donc une unique solution quelque soit le second membre donc $\mathrm{Im}(\psi) = \mathbb{R}_2[X]$ et ψ est donc surjective.
Finalement, ψ est un automorphisme.

Exercice 105 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, f et g deux applications linéaires de E vers F.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f + g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(f + g)$.

Correction :

1. Soit $\vec{y} \in \mathrm{Im}(f + g)$, il existe $\vec{x} \in E$, $\vec{y} = (f + g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x})$ donc $\vec{y} \in \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.
2. Soit $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$ alors $f(\vec{x}) = g(\vec{x}) = 0$ donc $(f + g)(\vec{x}) = 0$ et $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(f + g)$.

Exercice 106 :

Soit $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par $p(x, y) = (4x - 6y, 2x - 3y)$.

1. Montrer que p est linéaire.
2. Montrer que p est une projection.
3. Déterminer une base des sous-espaces E_1 et E_2 tels que p est la projection sur E_1 parallèlement à E_2.

<u>**Correction**</u> :

1. Soit $(\lambda, \mu, x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^6$, on a
$p(\lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2)) = p(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2) = (4(\lambda x_1 + \mu x_2) - 6(\lambda y_1 + \mu y_2), 2(\lambda x_1 + \mu x_2) - 3(\lambda y_1 + \mu y_2))$
$= \lambda p(x_1, y_1) + \mu p(x_2, y_2)$, donc p est linéaire.
2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(p \circ p)(x, y) = p(4x - 6y, 2x - 3y) = (4(4x - 6y) - 6(2x - 3y), 2(4x - 6y) - 3(2x - 3y)) =$ $(4x - 6y, 2x - 3y) = p(x, y)$ donc $p \circ p = p$ et p est une projection (avec la question 1).
3. On a $E_1 = \mathrm{Im}(p)$ et $E_2 = \mathrm{Ker}(p)$ donc on résoud $\begin{cases} 4x - 6y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$ et on trouve $2x = 3y$ donc $E_2 = \mathrm{Vect}((3, 2))$.
On résoud maintenant $\begin{cases} 4x - 6y = a \\ 2x - 3y = b \end{cases}$ et on trouve la condition $a = 2b$ donc $E_1 = \mathrm{Vect}((2, 1))$.

Exercice 107 :

Soit $s : \mathbb{C}_2[X] \longrightarrow \mathbb{C}_2[X]$ l'application définie par $s(P) = P - 2P(0)$.

1. Montrer que s est linéaire.
2. Montrer que s est une symétrie.
3. Déterminer une base des sous-espaces E_1 et E_2 tels que s est la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2.

<u>**Correction**</u> :

1. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ et $(P, Q) \in (\mathbb{C}_2[X])^2$, on a
$s(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q) - 2(\lambda P + \mu Q)(0) = \lambda s(P) + \mu S(Q)$ donc s est linéaire.
2. Soit $P \in \mathbb{C}_2[X]$, $(s \circ s)(P) = s(P - 2P(0)) = (P - 2P(0)) - 2(P - 2P(0))(0) = P$ donc $s \circ s = Id$ et s est bien une symétrie (avec la question 1).
3. On a $E_1 = \mathrm{Ker}(s - Id)$ et $E_2 = \mathrm{Ker}(s + Id)$ donc on résoud $P - 2P(0) - P = 0$ donc $P(0) = 0$ et $E_1 = X \bullet \mathbb{C}_1[X]$.
De même, on résoud $P - 2P(0) + P = 0$ donc $P = P(0)$ et $E_2 = \mathbb{C}_0[X]$.

Exercice 108 :

1. Montrer que la famille $((1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 2, 3))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que la famille $(1, j)$ est une base de $\mathbb{C}$ (considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel).
3. Montrer que la famille $(X^2 + X + 1, 2X^2 + 3X + 4, -X^2 + X + 1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et P un polynôme de degré n. Montrer que $(P, P', P'', \cdots, P^{(n)})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

<u>**Correction**</u> :

Remarquons tout d'abord que dans chaque cas, le nombre de vecteurs est égal à la dimension de l'espace vectoriel donc il suffit de montrer que les familles sont libres.

1. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(0, 1, 0) + \lambda_3(1, 2, 3) = (0, 0, 0)$, on obtient le système :
$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$ qui admet clairement pour unique solution $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ et la famille est libre.
2. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda_1 + j\lambda_2 = 0$. En prenant la partie réelle et la partie imaginaire, on obtient $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et la famille est libre.
3. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1(X^2 + X + 1) + \lambda_2(2X^2 + 3X + 4) + \lambda_3(-X^2 + X + 1) = 0$. En regardant coefficient par coefficient, on obtient alors le système :
$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$ qui admet pour unique solution $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ et la famille est libre.
4. Remarquons que par propriété du degré sur les dérivées, la famille est une famille de polynômes échelonnés non nuls donc elle est libre.

Exercice 109 :

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les trois vecteurs $\vec{u} = (0, -1, 2)$, $\vec{v} = (1, -2, 3)$ et $\vec{w} = (1, -1, 1)$.

1. $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
2. Déterminer le rang de $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
3. Après avoir extrait de la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base de Vect $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, donner les coordonnées du (ou des) vecteur(s) restant(s) dans cette base.
4. Compléter la base extraite dans la question précédente pour former une base de $\mathbb{R}^3$.

Correction :

1. Soit Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1(0, -1, 2) + \lambda_2(1, -2, 3) + \lambda_3(1, -1, 1) = (0, 0, 0)$, on obtient le système : $\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$. Ce système possède une infinité de solution donc la famille n'est pas libre et donc pas une base (On aurait pû remarquer que $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$)
2. Le système précédent est de rang 2 donc la famille aussi.
3. D'après les questions précendentes Vect $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) =$ Vect $(\vec{u}, \vec{v})$ donc $(\vec{u}, \vec{v})$ est une famille génératrice de Vect $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ et dim(Vect $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})) = 2$ donc $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de Vect $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
   On a alors $\vec{u} = (1, 0)$, $\vec{v} = (0, 1)$ et $\vec{w} = (-1, 1)$ dans cette base.
4. On voit tout de suite que $(\vec{u}, \vec{v}, (0, 0, 1))$ est libre et donc une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 110 :

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X]; P(1) = 0\}$ et $G = \text{Vect}\left(X^2\right)$ sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}_n[X]$.

Correction :

— Soit $P \in F \cap G$, il existe $a \in \mathbb{R}$, $P = aX^2$ et $P(1) = a = 0$ donc $P = 0$ donc F et G sont bien en somme directe.
— $\dim(G) = 1$ et F est le noyau de la forme linéaire non nulle $P \mapsto P(1)$ donc, par le théorème du rang, $\dim(F) = n$. Comme $\dim(F) + \dim(G) = n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ et que F et G sont en somme directe alors F et G sont supplémentaires.

Exercice 111 :

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
Soit T l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $T(P) = (X^2 - X)P(1) + (X^2 + X)P(-1)$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer le rang de T.
3. Déterminer la dimension et une base de $\text{Ker}(T)$.

Correction :

1. On sait que, pour tout a, $P \mapsto P(a)$ est linéaire donc par distributivité, T est linéaire. De plus, $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\deg(T(P)) \leq 2$ donc T est un endomorphisme ($n \geq 2$).
2. On a clairement $\text{Im}(T) \subset \text{Vect}(X^2 - X, X^2 + X)$, la réciproque est directe en considérant les polynômes $\frac{1}{2}X(X + 1)$ et $\frac{1}{2}X(X - 1)$. Donc $rg(T) = 2$.
3. Par le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(T)) = n - 1$. De plus, $T(P) = 0 \Leftrightarrow P(1) = P(-1) = 0$ donc $\text{Ker}(T) = (X^2 - 1) \bullet \mathbb{R}_{n-2}[X]$ et une base est par exemple $(X^2 - 1, X^3 - X, \dots, X^n - X^{n-2})$.

Exercice 112 :
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $rg(f) = rg(f^2)$.

1. Établir que $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires dans E.

<u>**Correction**</u> :

1. Rappelons qu'on a toujours $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f) \subset Ker(f^2)$. Comme $rg(f^2) = rg(f)$, on obtient donc $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f)$. De plus, par le théorème du rang,
$\dim(\mathrm{Ker}(f^2)) = \dim(E) - rg(f^2) = \dim(E) - rg(f) = \dim(\mathrm{Ker}(f))$ donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.
2. Par le théorème du rang, il suffit de montrer $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$, il existe y, $x = f(y)$ donc $0 = f(x) = f^2(y)$ donc $y \in \mathrm{Ker}(f^2)$ donc $y \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $x = 0$.

Exercice 113 :
Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}_3[X]$ par $\varphi(P) = 2P + (2 - 3X)P' + (2X^2 - X + 1)P''$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Écrire la matrice représentative de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$, puis une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$.

<u>**Correction**</u> :

1. — La dérivation étant linéaire, par distributivité et somme, φ est linéaire.
   — Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on a $\deg(P) \leq 3$, $\deg((2 - 3X)P') \leq 3$ et $\deg((2X^2 - X + 1)P'') \leq 3$ donc $\deg(\varphi(P)) \leq 3$ et φ est bien un endomorphisme.
2. $\varphi(1) = 2$, $\varphi(X) = -X + 2$, $\varphi(X^2) = 2X^2 + 4X - 6X^2 + 4X^2 - 2X + 2 = 2X + 2$ et
$\varphi(X^3) = 2X^3 + 6X^2 - 9X^3 + 12X^3 - 6X^2 + 6X = 5X^3 + 6X$ donc, finalement, $\mathcal{M}at(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.
3. On voit directement sur cette matrice triangulaire $rg(\varphi) = 3$, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}(X^2 + 2X - 3)$ et $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(1, X, X^3)$.

Exercice 114 :
Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(u)$, de $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et de $\mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
2. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

<u>**Correction**</u> :

1. La résolution des systèmes donne $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}((1, -1, 0))$, $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}((1, -1, -1))$ et $\mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}((0, 1, 1))$. On pose $e_1 = (1, -1, 0)$, $e_2 = (1, -1, -1)$ et $e_3 = (0, 1, 1)$ pour la suite.
2. La famille (e_1, e_2, e_3) est une famille de 3 vecteurs en dimension 3, on montre facilement que c'est une famille libre donc une base de $\mathbb{R}^3$ et, par construction des vecteurs, $\mathcal{M}at_{(e_1, e_2, e_3)}(u) = D$.

Exercice 115 :

Soit p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que p est un projecteur.
2. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice représentative de p est diagonale.

<u>**Correction**</u> :

1. $P^2 = P$ donc p est un endomorphisme vérifiant $p \circ p = p$ donc p est un projecteur.
2. On sait qu'il suffit de prendre la base adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.

   — Soit $(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(p)$ alors $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases}$ donc $y = 0$ et $x = z$. Soit $e_3 = (1, 0, 1)$, $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Vect}(e_3)$.

   — Soit $(a, b, c) \in \mathrm{Im}(p)$, on résoud $\begin{cases} x + 2y - z = 2a \\ y = b \\ -x + 2y + z = 2c \end{cases}$, on obtient comme condition $a - 2b + c = 0$. Posons $e_1 = (2, 1, 0)$, $e_2 = (0, 1, 2)$, on a $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.

   On a alors $\mathcal{M}at_{(e_1,e_2,e_3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 116 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement représenté par A.
   Soient $\vec{e}_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{e}_2 = (1, 0, 1)$ et $\vec{e}_3 = (1, 1, 1)$.
   Montrer que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et exprimer la matrice D de f dans cette base.
2. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.

<u>**Correction**</u> :

1. — On a une famille de 3 vecteurs en dimension 3, il suffit de montrer que la famille est libre.

   Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$, $\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3 = \vec{0}$, on a $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$ qui donne bien $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ donc la famille est bien libre.

   — $A\vec{e}_1 = \vec{e}_1$, $A\vec{e}_2 = \vec{e}_2$ et $A\vec{e}_3 = (2, 1, 2) = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ donc $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $A^n = \mathcal{M}at_{\mathcal{C}}(f^n)$ or $\mathcal{M}at_{(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)}(f^n) = D^n = \left(I_3 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc il reste plus qu'à utiliser la formule de changement de base. Notons $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et donc

   $A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1-n & n & n \\ 0 & 1 & 0 \\ -n & n & 1+n \end{pmatrix}$.

Exercice 117 :
Déterminer le rang des matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & \cos\theta & \cos 2\theta \\ \cos\theta & \cos 2\theta & \cos 3\theta \\ \cos 2\theta & \cos 3\theta & \cos 4\theta \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a & \cdots & a & 1 & a \\ a & a & \cdots & a & 1 \end{pmatrix}$

<u>**Correction**</u> :

Dans chaque cas, on va utiliser que le rang de la matrice est le rang du système linéaire homogène associé.

1. $\begin{cases} 2x-3y-4z=0 \\ 3x+y+5z=0 \\ -x \qquad -z=0 \\ \qquad 2y+4z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \quad +z=0 \\ \quad y+2z=0 \\ \qquad 0=0 \\ \qquad 0=0 \end{cases}$ donc le rang est 2.

2. $\begin{cases} x-2y-2z \qquad =0 \\ x \qquad -2z+2t=0 \\ x+2y+2z-2t=0 \\ x-3y-6z+5t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y-2z \qquad =0 \\ y \qquad +t=0 \\ 2y+2z-t=0 \\ y+4z-5t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y-2z \qquad =0 \\ y \qquad +t=0 \\ 2z-3t=0 \\ 0=0 \end{cases}$ donc le rang est 3.

3. $\begin{cases} x+\cos(\theta)y+\cos(2\theta)z=0 \\ \cos(\theta)x+\cos(2\theta)y+\cos(3\theta)z=0 \\ \cos(2\theta)x+\cos(3\theta)y+\cos(4\theta)z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \quad +\cos(\theta)y+ \qquad \cos(2\theta)z=0 \\ -\sin^2(\theta)y-\sin(\theta)\sin(2\theta)z=0 \\ -\sin(\theta)\sin(2\theta)y \quad -\sin^2(2\theta)z=0 \end{cases}$.
   - Si $\theta\equiv 0[\pi]$, $\sin(\theta)=\sin(2\theta)=0$ et le rang est 1.
   - Sinon $\sin(\theta)\neq 0$ et on peut simplifier par $-\sin^2(\theta)$ les 2 dernières équations, on obtient
   $\begin{cases} x \quad +\cos(\theta)y+ \qquad \cos(2\theta)z=0 \\ -\sin^2(\theta)y-\sin(\theta)\sin(2\theta)z=0 \\ -\sin(\theta)\sin(2\theta)y \quad -\sin^2(2\theta)z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\cos(\theta)y+\cos(2\theta)z=0 \\ y \quad +2\cos(\theta)z=0 \\ \cos(\theta)y+2\cos^2(\theta)z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\cos(\theta)y+\cos(2\theta)z=0 \\ y \quad +2\cos(\theta)z=0 \\ 0=0 \end{cases}$
   et dans ce cas, le rang est 2.

4. Commençons d'abord par ajouter toutes les autres colonnes à la première pour obtenir la matrice de même rang : $\begin{pmatrix} 1+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 1+(n-1)a & 1 & a & \cdots & a \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1+(n-1)a & \cdots & a & 1 & a \\ 1+(n-1)a & a & \cdots & a & 1 \end{pmatrix}$ puis on soustrait la ligne 1 à toutes les autres lignes pour obtenir :
   $\begin{pmatrix} 1+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 0 & 1-a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-a \end{pmatrix}$, il y a alors 3 cas :
   - $a=1$, alors le rang est 1.
   - $a=\frac{1}{1-n}$ alors le rang est $n-1$
   - sinon le rang est n.

Exercice 118 :

Une urne contient 5 boules rouges, 5 boules blanches et 6 boules bleues.

1. On tire 4 boules simultanément.
   On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues.
   Déterminer la loi de X, puis calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.
2. On tire maintenant 4 boules successivement avec remise.
   Reprendre les questions précédentes avec la variable aléatoire Y égale au nombre de boules rouges obtenues.

Correction :

1. — On commence d'abord par l'univers de X : $[\![0,4]\!]$.
   — On est dans une situation d'équiprobabilité donc on peut appliquer la formule nombre de cas favorables sur nombre de cas possibles.
   — Le nombre de cas possibles correspond au nombre de façon de choisir 4 boules simultanément parmi 16 donc on a $\binom{16}{4}$ possibilités.
   — On calcule maintenant la probabilités de chaque issue.
   — $\{X=0\}$ correspond a toutes les boules ont été choisies parmi les 11 pas rouges donc on a $\binom{11}{4}$ cas favorables donc $\mathbb{P}(X=0)=\frac{\binom{11}{4}}{\binom{16}{4}}=\frac{33}{182}$.
   — En appliquant le même raisonnement, on obtient :

X	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{33}{182}$	$\frac{\binom{5}{1}\binom{11}{3}}{\binom{16}{4}}=\frac{165}{364}$	$\frac{\binom{5}{2}\binom{11}{2}}{\binom{16}{4}}=\frac{55}{182}$	$\frac{\binom{5}{3}\binom{11}{1}}{\binom{16}{4}}=\frac{11}{182}$	$\frac{\binom{5}{4}}{\binom{16}{4}}=\frac{1}{364}$

   (penser à vérifier que la somme fait bien 1)
   — $\mathbb{E}(X)=\frac{165+220+66+4}{364}=\frac{5}{4}$.
   — $V(X)=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2=\frac{165+440+198+16}{364}-\frac{25}{16}=\frac{11}{16}$.
2. On applique exactement le même raisonnement mais on remarque que comme il y a remise, on est exactement dans le cas de la loi binomiale donc $Y\sim\mathcal{B}\left(4,\frac{5}{16}\right)$, $\mathbb{E}(Y)=4\times\frac{5}{16}=\frac{5}{4}$ et $V(Y)=\frac{45}{64}$.

Exercice 119 :

Un lot important de pièces contient une proportion p $(0<p<1)$ de pièces défectueuses.
On en prélève un échantillon de n $(\geqslant 2)$ pièces choisies au hasard.
Deux stratégies permettent de dépister les pièces défectueuses de cet échantillon :
→ la première consiste à tester les pièces une à une ;
→ la seconde consiste à effectuer un test global sur l'échantillon (on suppose qu'un tel test existe) : si le test révèle la présence d'une pièce défectueuse dans l'échantillon, on teste alors les pièces une à une.

1. On note X_n et Y_n le nombre de tests effectués en suivant respectivement la première, puis la deuxième stratégie. Déterminer les lois de X_n et Y_n.
2. Comparer le nombre moyen de tests effectués dans les deux stratégies.

Correction :

1. Pour la première stratégie, on teste tout donc X_n est constante et vaut n.
   Pour la deuxième stratégie, on a deux cas disjoints : Le lot ne contient aucune pièce défectueuse, cela arrive avec la probabilité $(1-p)^n$ par indépendance et il y a alors 1 test sinon, on fait $n+1$ tests. Donc $\mathbb{P}(Y_n=1)=(1-p)^n$ et $\mathbb{P}(Y=n+1)=1-(1-p)^n$.
2. $\mathbb{E}(X_n)=n$ et $\mathbb{E}(Y_n)=1\times(1-p)^n+(n+1)\times(1-(1-p)^n)=n+1-n(1-p)^n$. Donc
   $\mathbb{E}(X_n)\geq\mathbb{E}(Y_n)$ ssi $n(1-p)^n\geq 1$ ssi $\ln(n)+n\ln(1-p)\geq 0$ ssi $-\frac{\ln(n)}{n}\leq\ln(1-p)$.

(à titre d'exemple, s'il y a 1% de pièces défectueuses, alors $p=0.01$ et il faut au plus 643 pièces dans l'échantillon pour que la 2ème stratégie soit mieux en moyenne).

Exercice 120 :

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, de même loi uniforme sur l'ensemble $[\![0,n]\!]$.
Soient $Z = |X - Y|$ et $T = \inf\{X, Y\}$.

1. Déterminer la loi de Z et calculer $\mathbb{E}(Z)$.
2. Déterminer la loi de T et calculer $\mathbb{E}(T)$.
3. On considère $(X_1, \ldots, X_n)$ n variables aléatoires indépendantes et de même loi. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(\max(X_1, \ldots, X_n) \leq t) = (\mathbb{P}(X_1 \leq t))^n$.

Correction :

1. — On commence par l'univers de Z : comme X et Y sont dans $[\![0,n]\!]$ alors $Z \in [\![0,n]\!]$.
   — On commence par 0 : $\mathbb{P}(Z = 0) = \mathbb{P}(X = Y) = \sum\limits_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X = i, Y = i) = \sum\limits_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X = i) \times \mathbb{P}(Y = i)$ par indépendance donc $\mathbb{P}(Z = 0) = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{1}{(n+1)^2)} = \frac{1}{n+1}$.
   — Pour $k \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(X - Y = k) + \mathbb{P}(Y - X = k) =$
   $\sum\limits_{i=0}^{n-k} \mathbb{P}(Y = i)\mathbb{P}(X = k + i) + \sum\limits_{i=0}^{n-k} \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = k + i) = \frac{2(n-k+1)}{(n+1)^2}$.
   — $\mathbb{E}(Z) = \sum\limits_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(Z = k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2k(n-k+1)}{(n+1)^2} = \frac{2}{(n+1)^2} \sum\limits_{k=1}^{n} (n+1)k - k^2 = n - \frac{n(2n+1)}{3(n+1)} = \frac{n(n+2)}{3(n+1)}$.
2. En appliquant le même type de raisonnent,
   — On commence par l'univers de T : comme X et Y sont dans $[\![0,n]\!]$ alors $T \in [\![0,n]\!]$.
   — Pour $k \in [\![0,n]\!]$, $\mathbb{P}(T = k) = \mathbb{P}(X = k, Y > k) + \mathbb{P}(Y = k, X > k) + \mathbb{P}(X = Y = k) = \frac{2(n-k)+1}{(n+1)^2}$.
   — $\mathbb{E}(T) = \sum\limits_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(T = k) = \sum\limits_{k=1}^{n} k\frac{2(n-k)+1}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \sum\limits_{k=1}^{n} (2n+1)k - 2k^2 = \frac{n}{6(n+1)}(3(2n+1) - 2(2n+1)) = \frac{n(2n+1)}{6(n+1)}$.
3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(\max(X_1, \ldots, X_n) \leq t) = \mathbb{P}(X_1 \leq t, X_2 \leq t, \ldots, X_n \leq t)$
   $= \mathbb{P}(X_1 \leq t) \times \mathbb{P}(X_2 \leq t) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n \leq t)$ par indépendance
   $= (\mathbb{P}(X_1 \leq t))^n$ par même loi.

Exercice 121 :

Soient $p \in]0,1[$, X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de même paramètre p. On pose $U = X + Y$ et $V = X - Y$.

Déterminer :

1. La loi du couple (U, V).
2. La covariance de U et V.

U et V sont-elles indépendantes ?

Correction :

1.

$U\backslash V$	-1	0	1
0	0	$(1-p)^2$	0
1	$p(1-p)$	0	$p(1-p)$
2	0	p^2	0

2. $\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 2p$ et $\mathbb{E}(V) = 0$ donc $\mathbb{E}(U)\mathbb{E}(V) = 0$. $\mathbb{E}(UV) = -p(1-p) + p(1-p) = 0$ donc $Cov(U, V) = 0$. On a $\mathbb{P}(U = 0)\mathbb{P}(V = -1) = p(1-p)^3 \neq 0 = \mathbb{P}(U = 0, V = -1)$. On a donc ici U et V non indépendantes mais pourtant de covariance nulle.

Exercice 122 : Un secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n personnes distinctes ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$).

On admet que les n appels constituent n expériences aléatoires mutuellement indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est $p \in]0,1[$. On note $q = 1-p$.

X désigne la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.

1. Quelle est la loi de X ?
   Donner $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.
2. Après ses n recherches, le secrétaire demande une deuxième fois, et dans les mêmes conditions, chacun des correspondants qu'il n'a pas réussi à joindre la première fois.
   Soient Y le nombre de correspondants obtenus dans la deuxième série d'appels, et $Z = X+Y$ le nombre de correspondants obtenus.
   (a) Quelles sont les valeurs prises par Z ?
   (b) Calculer, pour $k \in [\![0,n]\!]$ et $\ell \in [\![0,n-k]\!]$, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{(X=k)}(Y=\ell)$.
   (c) Montrer que $\binom{n}{k} \times \binom{n-k}{\ell} = \binom{n}{\ell} \times \binom{n-\ell}{k}$.
   (d) Déterminer la loi de Z.

Correction :

1. On a clairement $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ donc $\mathbb{E}(X) = np$ et $V(X) = npq$.
2. (a) L'univers de Z est $[\![0,n]\!]$.
   (b) Sachant $X = k$, on est clairement entrain de refaire une loi binomiale sur $n-k$ personnes pour Y donc $Y_{X=k} \sim \mathcal{B}(n-k,p)$ et $\mathbb{P}_{(X=k)}(Y=\ell) = \binom{n-k}{\ell} p^\ell (1-p)^{n-k-\ell}$.
   (c) $\binom{n}{k} \times \binom{n-k}{\ell} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(n-k)!}{\ell!(n-k-\ell)!} = \frac{n!}{k!\ell!(n-k-\ell)!}$ et $\binom{n}{\ell} \times \binom{n-\ell}{k} = \frac{n!}{\ell!(n-\ell)!}\frac{(n-\ell)!}{k!(n-\ell-k)!} = \frac{n!}{k!\ell!(n-k-\ell)!}$ d'où l'égalité.
   (d) Pour $i \in [\![0,n]\!]$, $\mathbb{P}(Z=i) = \sum\limits_{k=0}^{i} \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}_{(X=k)}(Y=i-k)$ par la formule des probabilités totales. Donc
   $\mathbb{P}(Z=i) = \sum\limits_{k=0}^{i} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \binom{n-k}{i-k} p^{i-k} (1-p)^{n-i} = (1-p)^{2n-i} p^i \sum\limits_{k=0}^{i} \binom{n}{k}\binom{n-k}{n-i} \left(\frac{1}{1-p}\right)^k$
   $= (1-p)^{2n-i} p^i \sum\limits_{k=0}^{i} \binom{n}{n-i}\binom{i}{k} \left(\frac{1}{1-p}\right)^k = \binom{n}{i}(1-p)^{2n-i}p^i \left(1+\frac{1}{1-p}\right)^i = \binom{n}{i}(2p-p^2)^i \ ((1-p)^2)^{n-i}$.
   Autrement dit, $Z \sim \mathcal{B}(n, p(2-p))$.

Exercice 123 :

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Montrer que $\left| \int_{[a,b]} f \right| = \int_{[a,b]} |f|$ si et seulement si f a un signe constant sur $[a,b]$.

Correction :

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que f est positive sur $[a,b]$ (respectivement négative). On a alors $|f| = f$ (respectivement $|f| = -f$) donc $\int_{[a,b]} |f| = \int_{[a,b]} f = \left|\int_{[a,b]} f\right|$ (respectivement $\int_{[a,b]} |f| = \int_{[a,b]} -f = -\int_{[a,b]} f = \left|\int_{[a,b]} f\right|$) car l'intégrale d'une fonction positive est positive.

$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose donc $\left|\int_{[a,b]} f\right| = \int_{[a,b]} |f|$. On introduit alors les deux fonctions f^+ et f^- définies par $\forall x \in [a,b]$, $f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Par construction, $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$, f^+ et f^- sont deux fonctions positives sur $[a,b]$ et enfin, par continuité de f et théorème des valeurs intermédiaires, f^+ et f^- sont continues sur $[a,b]$. Si on réécrit l'hypothèse, on a alors $\left|\int_{[a,b]} f^+ - \int_{[a,b]} f^-\right| = \int_{[a,b]} f^+ + \int_{[a,b]} f^-$ donc $\int_{[a,b]} f^+ = 0$ ou $\int_{[a,b]} f^- = 0$. Or les fonctions f^+ et f^- étant positives et continues, on obtient $f^+ = 0$ ou $f^- = 0$ donc f négative ou f positive.

Exercice 124 :

Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2+k^2}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{n^2+k^2}$;

Correction :

1. $\forall n > 0$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$ avec f définie sur $[0,1]$ par $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. f est continue sur $[0,1]$ donc, par somme de Riemann, $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \int_0^1 f(x)dx = [\text{Arctan}(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.
2. $\forall n > 0$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$ avec f définie sur $[0,1]$ par $f : x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$. f est continue sur $[0,1]$ donc, par somme de Riemann, $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2} = \int_0^1 f(x)dx = [\frac{1}{2}\ln(1+x^2)]_0^1 = \frac{\ln(2)}{2}$.

Exercice 125 :

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_{n+1}^{2n+1} \frac{dx}{x} \leqslant \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \leqslant \int_n^{2n} \frac{dx}{x}$.
2. En déduire la convergence et la limite de la suite $\displaystyle\left(\sum_{p=n}^{2n} \frac{1}{p}\right)_{n\geqslant 1}$.

Correction :

1. Remarquons que $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$ donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx$.
   Sommons alors cette inégalité pour k allant de n à $2n-1$, en utilisant la relation de Chasles, on obtient $\displaystyle\int_{n+1}^{2n+1} \frac{dx}{x} \leqslant \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \leqslant \int_n^{2n} \frac{dx}{x}$.
2. Remarquons que par le calcul d'intégrale, on obtient que les termes de chaque côté convergent vers $\ln(2)$ donc $\displaystyle\left(\sum_{p=n}^{2n} \frac{1}{p}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\ln(2)$ par théorème des gendarmes. (il manque le terme $\frac{1}{n}$ dans la question 1 pour obtenir la suite mais comme il tend vers 0, cela ne change rien)

Exercice 126 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,dt$ et $W'_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = W'_n$.
   On pourra utiliser un changement de variable.
2. Calculer W_0 et W_1.
3. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, W_{n+2} en fonction de W_n.
4. Déduire de ce qui précède, pour tout $p \in \mathbb{N}$, une expression de W_{2p} et de W_{2p+1} en fonction de p.

Correction :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on réalise le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - u$, on a alors $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(\frac{\pi}{2} - u)\,du$ or $\sin(\frac{\pi}{2} - u) = \cos(u)$ donc $W_n = W'_n$.
2. $W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\,dt = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.
3. $W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\sin^{n+1}(t)\,dt$. On fait alors une IPP : $W_{n+2} = [-\cos(t)\sin^{n+1}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin^n(t)\,dt$.
   Or $\cos^2(t) = 1 - \sin^2(t)$ donc $W_{n+2} = (n+1)(W_n - W_{n+2})$ donc $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$.
4. On a donc, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $W_{2p} = W_0 \prod\limits_{k=0}^{p-1} \frac{2k+1}{2k+2} = \frac{\pi}{2}\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}$ et $W_{2p+1} = W_1 \prod\limits_{k=0}^{p-1} \frac{2k+2}{2k+3} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.

Exercice 127 :

En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ entre 0 et 1, montrer que :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$$

Correction :

Posons $f : x \mapsto \ln(1+x)$. Rappelons que cette fonction est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$ et que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0,1]$, $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$ et $|f^{(k)}(x)| \leq (k-1)!$. Si on applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à f en 0, on obtient donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0,1]$, $\left|\ln(1+x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}\right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$. Pour $x = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\ln(2) - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| \leq \frac{1}{n+1}$ donc $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$

Exercice 128 :

1. Soit $n \geq 4$ et $(a,b,c,d) \in \{1,\ldots,n\}^4$ tous distincts. Que vaut $(a\ b) \circ (c\ d) \circ (d\ a)$?
2. Que dire d'une permutation de S_n possédant au moins $n-1$ points fixes.
3. Une permutation telle que $s^2 = I_d$ est-elle nécessairement une transposition ?
4. Énumérer tous les éléments de S^4.

Correction :

1. Notons $S = (a\ b) \circ (c\ d) \circ (d\ a)$, remarquons alors que $supp(S) \subset \{a,b,c,d\}$ donc il suffit de chercher les images de ces points. On a $S(a) = c$, $S(b) = a$, $S(c) = d$ et $S(d) = b$ donc $S = (a\ c\ d\ b)$.
2. Soit S une permutation ayant au moins $n-1$ points fixes. Supposons que S n'est pas l'identité, S a alors exactement $n-1$ points fixes, notons a le point qui n'est pas fixe. Remarquons alors que $S(a) \neq a$ est alors un point fixe. Mais alors $S(a)$ possède à la fois a et $S(a)$ pour antécédent ce qui est une contradiction (S est injective) donc S est l'identité.
3. Non, toute composée de transposition à support disjoint satisfait $s^2 = I_d$.
4. Distinguons suivant le nombre de points fixes :

4 points fixes : Il y a uniquement l'identité.

3 points fixes : Il n'y en a pas (d'après 2))

2 points fixes : On a alors toutes les transpositions à savoir $\binom{4}{2} = 6$: $(a\ b)$, $(a\ c)$, $(a\ d)$, $(b\ c)$, $(b\ d)$ et enfin $(c\ d)$.

1 point fixe : On a alors tous les 3-cycles à savoir 8 : $(a\ b\ c)$, $(a\ c\ b)$, $(a\ b\ d)$, $(a\ d\ b)$, $(a\ c\ d)$, $(a\ d\ c)$, $(b\ c\ d)$, $(b\ d\ c)$.

0 point fixe : On a alors les 4-cycles et composée de transpositions à support disjoints : $(a\ b\ c\ d)$, $(a\ c) \circ (b\ d)$, $(a\ d\ c\ b)$, $(a\ c\ b\ d)$, $(a\ b) \circ (c\ d)$, $(a\ d\ b\ c)$, $(a\ c\ d\ b)$, $(a\ d) \circ (b\ c)$, $(a\ b\ d\ c)$.

On a bien les 4! permutations.

Exercice 129 :

Pour les permutations σ suivantes, décomposer σ en produits de cycles disjoints, en produit de transpositions, calculer la signature de σ puis σ^{100} :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 9 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Correction :

1. $\sigma_1 = (1\ 3\ 4\ 6) \circ (2\ 5) = (1\ 6) \circ (3\ 4) \circ (1\ 4) \circ (2\ 5)$, $\varepsilon(\sigma_1) = 1$ et $\sigma_1^{100} = (1\ 3\ 4\ 6)^{100} \circ (2\ 5)^{100} = I_d$.
2. $\sigma_2 = (1\ 4\ 7\ 8) \circ (2\ 6\ 5) \circ (3\ 9) = (1\ 8) \circ (4\ 7) \circ (1\ 7) \circ (2\ 6) \circ (6\ 5) \circ (3\ 9)$, $\varepsilon(\sigma_2) = 1$ et $\sigma_2^{100} = (1\ 4\ 7\ 8)^{100} \circ (2\ 6\ 5)^{100} \circ (3\ 9)^{100} = (2\ 6\ 5)$.

Exercice 130 :

Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints.
2. Donner la signature de σ.
3. Décomposer σ en produit de transpositions.
4. Calculer σ^{2021}.

Correction :

1. $\sigma = (1\ 3\ 6\ 2\ 5) \circ (4\ 7)$.
2. $\varepsilon(\sigma) = (-1)^4 \times (-1) = -1$.
3. $\sigma = (3\ 6) \circ (6\ 2) \circ (2\ 5) \circ (1\ 5) \circ (4\ 7)$.
4. $\sigma^{2021} = (1\ 3\ 6\ 2\ 5)^{2021} \circ (4\ 7)^{2021} = \sigma$

Exercice 131 :

Calculer, pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et pour tout $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$, le déterminant $\begin{vmatrix} a+\alpha & a+\beta & a+\gamma \\ b+\alpha & b+\beta & b+\gamma \\ c+\alpha & c+\beta & c+\gamma \end{vmatrix}$

Correction :

Posons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ puis $\vec{x} = (a,b,c)$ et $\vec{e} = (1,1,1)$ de sorte que
$\begin{vmatrix} a+\alpha & a+\beta & a+\gamma \\ b+\alpha & b+\beta & b+\gamma \\ c+\alpha & c+\beta & c+\gamma \end{vmatrix} = \det_{\mathcal{B}}(\vec{x}+\alpha\vec{e}, \vec{x}+\beta\vec{e}, \vec{x}+\gamma\vec{e})$.
On peut alors utiliser la linéarité par rapport à la première variable :
$\det_{\mathcal{B}}(\vec{x}+\alpha\vec{e}, \vec{x}+\beta\vec{e}, \vec{x}+\gamma\vec{e}) = \det_{\mathcal{B}}(\vec{x}, \vec{x}+\beta\vec{e}, \vec{x}+\gamma\vec{e}) + \alpha\det_{\mathcal{B}}(\vec{e}, \vec{x}+\beta\vec{e}, \vec{x}+\gamma\vec{e})$.
On peut alors utiliser la linéarité par rapport à la deuxième variable dans chaque terme puis la linéarité par rapport à la troisième variable dans chacun des quatre termes obtenus :
$\det_{\mathcal{B}}(\vec{x}+\alpha\vec{e}, \vec{x}+\beta\vec{e}, \vec{x}+\gamma\vec{e}) = \det_{\mathcal{B}}(\vec{x},\vec{x},\vec{x}) + \gamma\det_{\mathcal{B}}(\vec{x},\vec{x},\vec{e}) + \beta\det_{\mathcal{B}}(\vec{x},\vec{e},\vec{x}) + \beta\gamma\det_{\mathcal{B}}(\vec{x},\vec{e},\vec{e})$
$+\alpha\det_{\mathcal{B}}(\vec{e},\vec{x},\vec{x}) + \alpha\gamma\det_{\mathcal{B}}(\vec{e},\vec{x},\vec{e}) + \alpha\beta\det_{\mathcal{B}}(\vec{e},\vec{e},\vec{x}) + \alpha\beta\gamma\det_{\mathcal{B}}(\vec{e},\vec{e},\vec{e})$. Or chaque déterminant est nul par propriété alternée (il y a a chaque fois au moins deux fois le même vecteur) donc finalement $\begin{vmatrix} a+\alpha & a+\beta & a+\gamma \\ b+\alpha & b+\beta & b+\gamma \\ c+\alpha & c+\beta & c+\gamma \end{vmatrix} = 0$

Exercice 132 :

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

1. Etant donnés trois complexes a, b et c. On note $D_n(a,b,c)$ le déterminant $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ c & a & b & \ddots & & \vdots \\ 0 & c & a & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & c & a & b \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & c & a \end{vmatrix}$.
   Calculer D_{n+2} en fonction de D_{n+1} et D_n.
2. Calculer D_n en fonction de n lorsque :
   (a) $a = 2$, $b = c = 1$;
   (b) $a = 2$, $b = 2$, $c = 1$;

Correction :

1. En développant par rapport à la première ligne, on, obtient : $D_{n+2} = aD_{n+1} - b \begin{vmatrix} c & b & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a & b & \ddots & & \vdots \\ 0 & c & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & c & a & b \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & c & a \end{vmatrix}$.
   On peut alors développer par rapport à la première colonne :
   $D_{n+2} = aD_{n+1} - bcD_n$.

2. (a) On a ici $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$. L'équation caractéristique de cette suite récurrente linéaire d'ordre 2 est : $x^2 - 2x + 1 = 0$ dont la solution évidente est 1. Donc il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n = \lambda n + \mu$. Or $D_1 = 2$ et $D_2 = 3$ donc finalement $D_n = n+1$.
   (b) On a ici $D_{n+2} = 2D_{n+1} - 2D_n$. L'équation caractéristique de cette suite récurrente linéaire d'ordre 2 est : $x^2 - 2x + 2 = 0$ dont les solutions sont $\sqrt{2}e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$. Donc il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n = \left(\lambda\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + \mu\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right)2^{\frac{n}{2}}$. Or $D_1 = 2$ et $D_2 = 2$ donc finalement $D_n = \left(\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right)2^{\frac{n}{2}}$.

Exercice 133 :

Soient a, b et c trois réels fixés. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue x :

1. $\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} = 0$ 2. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & 0 & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$

__Correction__ :

1. Remarquons tout d'abord que la somme de chaque colonne est identique donc on fait $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4$
$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} = (a+b+c+x) \begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & x & c & b \\ 1 & c & x & a \\ 1 & b & a & x \end{vmatrix}$. On fait maintenant $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$
$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} = (a+b+c+x) \begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & x-a & c-b & b-c \\ 0 & c-a & x-b & a-c \\ 0 & b-a & a-b & x-c \end{vmatrix} = (a+b+c+x) \begin{vmatrix} x-a & c-b & b-c \\ c-a & x-b & a-c \\ b-a & a-b & x-c \end{vmatrix}$$
Si on fait $C_1 \leftarrow C_1 + C_3$, on a alors $\begin{vmatrix} x-a & c-b & b-c \\ c-a & x-b & a-c \\ b-a & a-b & x-c \end{vmatrix} = (x+b-a-c) \begin{vmatrix} 1 & c-b & b-c \\ 0 & x-b & a-c \\ 1 & a-b & x-c \end{vmatrix}$
On fait alors $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ et on développe par rapport à C_1, $\begin{vmatrix} 1 & c-b & b-c \\ 0 & x-b & a-c \\ 1 & a-b & x-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-b & a-c \\ a-c & x-b \end{vmatrix}$
La somme des deux colonnes est identique donc on refait l'étape 1 et finalement
$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} = (a+b+c+x)(x+a-b-c)(x+b-a-c)(x+c-b-a)$$
Donc $S = \{-a-b-c \; ; \; a+b-c \; ; \; a+c-b \; ; \; b+c-a\}$.
2. En développant par rapport à la première colonne, on obtient directement $abc - x(ab+ac+bc) = 0$ donc
   - Si $ab+ac+bc = 0$ avec au moins 1 des a, b, c nul, on a $0 = 0$ et tous les x sont solutions.
   - Si $ab+ac+bc = 0$ avec a, b, c non nuls alors il n'y a pas de solution.
   - Si $ab+ac+bc \neq 0$ alors il y a une solution $x = \frac{abc}{ab+bc+ac}$.

Exercice 134 :

Soit $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 \neq 0$ et $B^3 = 0$.

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement représenté par B.
   (a) Montrer qu'il existe $\vec{x}_0$ tel que $f^2(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$.
   (b) Montrer que $(\vec{x}_0, f(\vec{x}_0), f^2(\vec{x}_0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer alors qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ tel que $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Montrer que $\det(\mathrm{I}_3 + B) = 1$.
4. Montrer que, pour toute matrice A inversible de taille 3 **commutant avec** B, on a $\det(A+B) = \det(A)$.

__Correction__ :

1. (a) $B^2 \neq 0$ donc $f^2 \neq \tilde{0}$ donc il existe $\vec{x}_0$ tel que $f^2(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$.
   (b) On a une famille de 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ de dimension 3 donc il suffit de montrer que la famille est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1\vec{x}_0 + \lambda_2 f(\vec{x}_0) + \lambda_3 f^2(\vec{x}_0) = \vec{0}$. Comme $B^3 = 0$ alors $f^3 = \tilde{0}$ donc en appliquant f^2 à l'égalité et par linéarité, on a $\lambda_1 f^2(\vec{x}_0) = 0$ donc $\lambda_1 = 0$. On recommence avec f pour avoir $\lambda_2 = 0$ puis $\lambda_3 = 0$ donc la famille est libre. C'est bien une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Dans cette base, la matrice de f est clairement $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc en notant P la matrice de passage de la base canonique à cette base, par la formule de changement de base, on a bien $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. $\det(\mathrm{I}_3 + B) = \det(P^{-1}(\mathrm{I}_3 + B)P)$ par invariance par changement de base. Or $P^{-1}(\mathrm{I}_3 + B)P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\det(\mathrm{I}_3 + B) = 1$.
4. $\det(A+B) = \det(A)\det(\mathrm{I}_0 + A^{-1}B)$ or A et B commutent donc A^{-1} et B aussi donc $(A^{-1}B)^2 = (A^{-1})^2B^2 \neq 0$ et $(A^{-1}B)^3 = (A^{-1})^3B^3 = 0$ donc, par la question précédente appliquée à $A^{-1}B$, $\det(\mathrm{I}_0 + A^{-1}B) = 1$ et $\det(A+B) = \det(A)$.

Exercice 135 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3, et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base de E.

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & 6 & 6 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer l'ensemble des réels λ tels que $\det(A - \lambda \mathrm{I}_3) = 0$.
2. Déterminer une base $\mathcal{B}' = (\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3)$ de E telle que $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

<u>**Correction**</u> :

1. $\det(A - \lambda \mathrm{I}_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & -3 \\ -2 & 6-\lambda & 6 \\ 2 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & -3 \\ -1 & 3-\frac{\lambda}{2} & 3 \\ 1 & -1 & -1-\frac{\lambda}{2} \end{vmatrix}$. On fait alors $L_1 \leftarrow L_1 - (3-\lambda)L_3$
$L_2 \leftarrow L_2 + L_3$.
$= 4 \begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda & \frac{\lambda}{2}(1-\lambda) \\ 0 & 2-\frac{\lambda}{2} & 2-\frac{\lambda}{2} \\ 1 & -1 & -1-\frac{\lambda}{2} \end{vmatrix} = 2(1-\lambda)(4-\lambda) \begin{vmatrix} 0 & 1 & \frac{\lambda}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1-\frac{\lambda}{2} \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda)(2-\lambda)$.
Donc $S = \{1; 2; 4\}$.
2. Remarquons tout d'abord que $\det(A - \lambda \mathrm{I}_3) = 0$ ssi $A - \lambda \mathrm{I}_3$ non inversible ssi $f - \lambda \mathrm{Id}$ non bijective ssi $f - \lambda \mathrm{Id}$ non injective ssi $Ker(f - \lambda \mathrm{Id}) \neq \{\vec{0}\}$ ssi $\exists \vec{x},\ f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$. On cherche alors les noyaux et on trouve : $Ker(f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\{(1,-2,2)\}$, $Ker(f - 2\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\{(1,-1,1)\}$ et $Ker(f - 4\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\{(-1,2,-1)\}$.
On pose alors $\vec{\varepsilon}_1 = (1,-2,2)$, $\vec{\varepsilon}_2 = (1,-1,1)$ et $\vec{\varepsilon}_3 = (-1,2,-1)$. On montre alors facilement que $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3)$ est libre dans E de dimension 3 donc une base et par construction $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 136 :

Déterminer la nature des séries numériques suivantes :

1. $\sum \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$
2. $\sum \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$
3. $\sum \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)$
4. $\sum \frac{\ln(n)}{n^3}$
5. $\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$
6. $\sum \frac{\sin(n)}{2^n}$
7. $\sum \frac{n+\cos(n)}{\mathrm{e}^n + \sin n}$
8. $\sum n \ln(n) \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$
9. $\sum \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$
10. $\sum \frac{1}{n!}$
11. $\sum \frac{1}{\ln(n)^2}$
12. $\sum \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$
13. $\sum \left(\frac{1}{\ln(3n)}\right)^n$
14. $\sum \ln\left(\cos\left(\frac{1}{2n}\right)\right)$

<u>**Correction**</u> :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)\right| = \sin\left(\frac{1}{2^n}\right) \sim \frac{1}{2^n}$ or la série des $\frac{1}{2^n}$ converge par série géométrique donc la série converge.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{n}$ or la série des $\frac{1}{n}$ diverge par Riemann donc la série diverge.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)\right| = \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim \frac{1}{2n^2}$ or la série des $\frac{1}{n^2}$ converge par Riemann donc la série converge.
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\frac{\ln(n)}{n^3}\right| = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ par C.C. or la série des $\frac{1}{n^2}$ converge par Riemann donc la série converge.
5. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\frac{\ln(n)}{n^2}\right| = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ par C.C. or la série des $\frac{1}{n^{3/2}}$ converge par Riemann donc la série converge.
6. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|\frac{\sin(n)}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n}$ or la série des $\frac{1}{2^n}$ converge par série géométrique donc la série converge.
7. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|\frac{n+\cos(n)}{\mathrm{e}^n+\sin n}\right| = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ par C.C. or la série des $\frac{1}{n^2}$ converge par Riemann donc la série converge.
8. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|n \ln(n) \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}\right| = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ par C.C. or la série des $\frac{1}{n^2}$ converge par Riemann donc la série converge.
9. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}\right| \to 1$ donc la série diverge grossièrement.
10. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|\frac{1}{n!}\right| = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ or la série des $\frac{1}{n^2}$ converge par Riemann donc la série converge.

11. $\forall n \geq 2$, $\frac{1}{n} = o\left(\left|\frac{1}{\ln(n)^2}\right|\right)$ or la série des $\frac{1}{n}$ diverge par Riemann donc la série diverge.
12. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}\right| \sim \frac{1}{n^2}$ par T.A.F. or la série des $\frac{1}{n^2}$ converge par Riemann donc la série converge.
13. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\left(\frac{1}{\ln(3n)}\right)^n\right| \leq \left(\frac{1}{\ln(3)}\right)^n$ or la série des $\frac{1}{\ln(3)^n}$ converge par série géométrique donc la série converge.
14. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\ln\left(\cos\left(\frac{1}{2n}\right)\right)\right| \sim \frac{1}{8n^2}$ or la série des $\frac{1}{n^2}$ converge par Riemann donc la série converge.

Exercice 137 :

Pour tout entier $n \geqslant 2$ on note $u_n = \dfrac{1}{n \ln n}$.

1. Comparer u_n avec $\frac{1}{n}$, avec $\frac{1}{n^2}$. Que peut-on en déduire pour la nature de la série $\sum u_n$?
2. (a) Etudier les variations de $f : x \longmapsto \frac{1}{x \ln x}$ sur $[2, +\infty[$.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $u_n \geqslant \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\, dx$.
   (c) En déduire que, pour tout $N \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{n=2}^{N} u_n \geqslant \ln\left(\frac{\ln(N+1)}{\ln 2}\right)$.
   (d) Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

__Correction__ :

1. $\frac{1}{n} = o(u_n)$ et $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc on ne peut rien conclure sur la nature de la série.
2. (a) f est clairement décroissante.
   (b) Pour tout $x \in [n; n+1]$, on a donc $f(n) \geq f(x)$. Par passage à l'intégrale, on obtient $u_n = \int_n^{n+1} f(n) dt \geq \int_n^{n+1} f(x)\, dx$.
   (c) Par somme, on a, pour tout $N \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{n=2}^{N} u_n \geqslant \sum_{n=2}^{N}\left(\int_n^{n+1} f(x)\, dx\right) = \int_2^{N+1} f(x) dx$ par la relation de Chasles. Or $x \mapsto \ln(\ln(x))$ est une primitive de f donc $\int_2^{N+1} f(x) dx = \ln\left(\frac{\ln(N+1)}{\ln 2}\right)$.
   (d) $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \ln\left(\frac{\ln(N+1)}{\ln 2}\right) = +\infty$ donc la série des u_n diverge.

Exercice 138 :

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1])$.

Pour tout $(f, g) \in E^2$, on pose $(f \mid g) = f(0)g(0) + \displaystyle\int_0^1 f'(t) g'(t)\, dt$.

1. Montrer que cette expression définit un produit scalaire sur E.
2. On considère $\mathbb{R}_2[X]$ comme une partie de E.
   Déterminer alors une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.

__Correction__ :

1. - La symétrie est évidente (par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$).
   - La linéarité par rapport à la première variable est évidente (par linéarité de l'intégrale).
   - $(f \mid f) \geq 0$ par positivé de l'intégrale.
   - Si $(f \mid f) = 0$ alors, par somme de termes positifs, $f(0)^2 = 0$ et $\int_0^1 f'(t)^2 dt = 0$. f est $\mathcal{C}^1$ donc f' est continue donc par intégrale nulle, $f' = 0$ donc f est constante et donc $f = 0$.

   donc on a bien un produit scalaire.
2. On utilise le procédé de Gram-Schmidt sur la base $(1, X, X^2)$:
   - $(1 \mid 1) = 1$ donc 1 est déjà unitaire.
   - $(1 \mid X) = 0$ et $(X \mid X) = 1$ donc $(1, X)$ est déjà orthonormée.
   - $(1 \mid X^2) = 0$ et $(X \mid X^2) = 1$ donc on pose $P = X^2 - X$.
   - $(P \mid P) = \frac{1}{3}$.

   donc finalement $(1, X, \sqrt{3}(X^2 - X))$ est une base orthormée de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 139 :
Soit $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2$.
2. A quelle(s) condition(s) l'inégalité précédente est-elle une égalité ?

<u>**Correction**</u> :

1. On introduit le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. L'inégalité de Cauchy-Schwartz appliquée à $(x_1,\dots,x_n)$ et $(1,\dots,1)$ donne : $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\times 1\right)^2 \le \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\right)\times\left(\sum\limits_{k=1}^{n} 1^2\right)$ d'où le résultat.
2. On a égalité dans l'inégalité de C.S. ssi $(x_1,\dots,x_n)$ et $(1,\dots,1)$ sont colinéaires (positivement si on avait pris la racine) donc $x_1=\dots=x_n$.

Exercice 140 :
Soit E un espace euclidien.
On considère deux endomorphismes f et g de E vérifiant, pour tout $x\in E$, $||f(x)||=||g(x)||$.
Démontrer que, pour tout $(x,y)\in E^2$, $(f(x)|f(y))=(g(x)|g(y))$.

<u>**Correction**</u> :
Pour tout $(x,y)\in E^2$, $(f(x)|f(y))=\frac{1}{2}(||f(x)+f(y)||^2-||f(x)||^2-||f(y)||^2)=\frac{1}{2}(||f(x+y)||^2-||f(x)||^2-||f(y)||^2)=\frac{1}{2}(||g(x+y)||^2-||g(x)||^2-||g(y)||^2)=\frac{1}{2}(||g(x)+g(y)||^2-||g(x)||^2-||g(y)||^2)=(g(x)|g(y))$.

Exercice 141 :
Soient E un espace euclidien, F et G deux sev de E.
Montrer les égalités $(F+G)^\perp=F^\perp\cap G^\perp$ et $(F\cap G)^\perp=F^\perp+G^\perp$.

<u>**Correction**</u> :

- On procède par double inclusion
  $\subset$: $F\subset F+G$ donc $(F+G)^\perp\subset F^\perp$. De même avec G donc $(F+G)^\perp\subset F^\perp\cap G^\perp$
  $\supset$: Soit $z\in F^\perp\cap G^\perp$ alors, pour tout $x\in F$ et pour tout $y\in G$, $(z\,|\,x)=(z\,|\,y)=0$ donc par linéarité, $(z\,|\,x+y)=0$ donc $z\in(F+G)^\perp$.
- Pour la deuxième égalité, on applique la première à $F^\perp$ et $G^\perp$ donc $(F^\perp+G^\perp)^\perp=F\cap G$ et on obtient le résultat en prenant l'orthogonal.

Exercice 142 :
Soient E un espace euclidien, et p une projection de E.

1. Montrer que, si p est une projection orthogonale, alors, pour tout $x\in E$, $||p(x)||\leqslant||x||$.
2. On suppose à présent que, pour tout $x\in E$, $||p(x)||\leqslant||x||$.
   (a) Montrer que, pour tout $x\in\mathrm{Im}(p)$, pour tout $y\in\mathrm{Ker}(p)$, et pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, $2\lambda\,(x\,|\,y)+\lambda^2||y||^2\geqslant 0$.
   (b) En déduire que p est une projection orthogonale.

<u>**Correction**</u> :

1. Comme p est une projection orthogonale, $(p(x)\,|\,x-p(x))=0$ donc par le théorème de Pythagore, $||x||^2=||p(x)||^2+||x-p(x)||^2$ donc $||p(x)||\leqslant||x||$.
2. (a) Remarquons que $p(x+\lambda y)=x$ donc $||x||^2=||p(x+\lambda y)||^2\le||x+\lambda y||^2=||x||^2+2\lambda\,(x\,|\,y)+\lambda^2||y||^2$ d'où le résultat.
   (b) $2\lambda\,(x\,|\,y)+\lambda^2||y||^2$ est un polynôme en λ de degré 2 de signe constant donc son discriminant est négatif donc $(x\,|\,y)^2\le 0$ donc $(x\,|\,y)=0$ donc $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont orthogonaux donc p est une projection orthogonale.