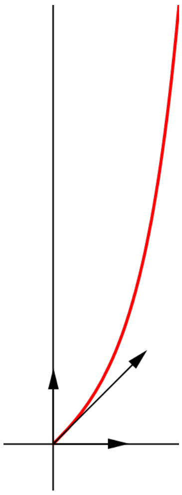
Correction devoir sur table 2 : Mathématiques

MPSI, Lycée Dessaignes

Problème A :

1. La fonction $x \mapsto x\sqrt{x}$, en tant que produit de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$, est dérivable sur $]0,+\infty[$. Comme exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \exp(x\sqrt{x})$, en tant que composée de fonctions dérivables, est dérivable sur $]0,+\infty[$, et il en est de même de $x \mapsto \exp(x\sqrt{x})-1$.
   Ainsi, en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, f est dérivable sur $]0,+\infty[$, et, pour tout $x>0$:
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(1\times\sqrt{x}+x\times\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\exp\left(x\sqrt{x}\right)\times\sqrt{x}-\left(\exp\left(x\sqrt{x}\right)-1\right)\times\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} \\ &= \frac{\frac{3x}{2}\times\exp\left(x\sqrt{x}\right)-\left(\exp\left(x\sqrt{x}\right)-1\right)\times\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} \\ &= \frac{3x\sqrt{x}\exp\left(x\sqrt{x}\right)-\exp\left(x\sqrt{x}\right)+1}{2x\sqrt{x}}. \end{aligned}$$
2. Lorsque l'on fait tendre x vers 0 dans l'expression de $f(x)$, on constate qu'on a affaire à une forme indéterminée. Pour la lever, ramenons-nous au "classique" $\dfrac{\exp(h)-1}{h}$ (lorsque $h \to 0$), et écrivant, pour tout $x>0$, $f(x) = \dfrac{\exp(x\sqrt{x})-1}{x\sqrt{x}} \times x$.
   Puisque $x\sqrt{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, par composition, $\dfrac{\exp(x\sqrt{x})-1}{x\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$, donc, par produit, $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
   f est donc prolongeable par continuité en 0.
3. Pour étudier la dérivabilité de $\tilde{f}$ en 0, considérons le taux de variation de $\tilde{f}$ en 0.
   Pour tout $x>0$, $\dfrac{\tilde{f}(x)-\tilde{f}(0)}{x-0} = \dfrac{\frac{\exp(x\sqrt{x})-1}{\sqrt{x}}-0}{x} = \dfrac{\exp(x\sqrt{x})-1}{x\sqrt{x}}$.
   En travaillant comme dans la question précédente, il vient donc : $\dfrac{\tilde{f}(x)-\tilde{f}(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$.
   Par conséquent, $\tilde{f}$ est dérivable en 0, et $\tilde{f}'(0)=1$.
4. (a) i. En tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$, g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et, pour tout $t \geqslant 0$:
$$g'(t) = 3\exp(t)+3t\exp(t)-\exp(t) = (2+3t)\exp(t) > 0.$$
   Par conséquent, g est strictement croissante.
   ii. g étant strictement croissante, pour tout $t>0$, $g(t)>g(0)=0$.
   (b) Les calculs effectués précédemment permettent de voir que, pour tout $x>0$, $f'(x) = \dfrac{g(x\sqrt{x})}{2x\sqrt{x}} > 0$.
   f est donc strictement croissante.
5. Pour tout $x>0$, $f(x) = \dfrac{\exp\left(x\sqrt{x}\right)-1}{\sqrt{x}} = \dfrac{\exp\left(x\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{\exp\left(x\sqrt{x}\right)}{x\sqrt{x}} \times x - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
   Comme $x\sqrt{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et puisque $\dfrac{\exp(X)}{X} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, par composition, $\dfrac{\exp\left(x\sqrt{x}\right)}{x\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Par quelques opérations usuelles sur les limites, on en déduit que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
6. Comme $\tilde{f}'(0)=1$, la courbe représentative de $\tilde{f}$ admet, au point d'abscisse 0, une tangente de coefficient directeur 1. Et puisque $\tilde{f}(0)=0$, il s'agit de la droite d'équation $y=x$.



On obtient alors la courbe suivante :

7. On doit ici montrer que $\tilde{f}'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \tilde{f}'(0) = 1$.

   Or, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{3}{2}\exp\left(x\sqrt{x}\right) - \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\exp\left(x\sqrt{x}\right) - 1}{x\sqrt{x}}$.

   Le premier terme de cette expression ne pose pas de problème particulier : $\dfrac{3}{2}\exp\left(x\sqrt{x}\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{3}{2}$.

   Quant au second, avec une nouvelle composition, on voit que : $\dfrac{\exp\left(x\sqrt{x}\right) - 1}{x\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$.

   Par conséquent, par soustraction de limites, $f'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. $\tilde{f}'$ est donc continue en 0.

Problème B :

1.(a) $\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists y \in \mathbb{R}, xy = 1$. La négation est alors : $\exists x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}, xy \neq 1$. Pour la démonstration, il suffit de prendre $y = \frac{1}{x}$.

(b) Il existe un réel x tel que, pour tout réel y, y^2 est l'opposé de x. La négation est : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y^2 \neq 0$. Pour la preuve de la négation, il suffit de prendre $y = x - 1$ car $x^2 - x + 1 > 0$ pour tout x.

2. On le démontre par récurrence double :
   Initialisation : $a_1 = 1$ et $1 \leq 1 \leq 1$. $a_2 = a_1 + \frac{2}{2}a_0 = 2$ et $1 \leq 2 \leq 2^2$.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $1 \leq a_n \leq n^2$ et $1 \leq a_{n+1} \leq (n+1)^2$. Montrons le pour $n+2$.
   $a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{2}{n+2}a_n$ donc $1 + \frac{2}{n+2} \leq a_{n+2} \leq (n+1)^2 + \frac{2}{n+2}n^2$ par hypothèse de récurrence. $1 + \frac{2}{n+2} \geq 1$ donc la première inégalité est démontrée. Il reste à montrer $(n+1)^2 + \frac{2}{n+2}n^2 \leq (n+2)^2$. En développant les deux carrés, on obtient $\frac{2}{n+2}n^2 \leq 2n + 3$ puis par produit $2n^2 \leq 2n^2 + 7n + 6$ ce qui est vrai.

3. Analyse : Soit f une solution. En prenant $x = y = 0$, on a $f(0) = 2f(0)$ donc $f(0) = 0$. De plus, en fixant y et en dérivant par rapport à x l'équation vérifiée par f, on a $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f'(x + y) = f'(x)$ donc f' est une fonction constante et donc f est de la forme $x \mapsto ax + b$. Avec $f(0) = 0$, on obtient f est de la forme $x \mapsto ax$.
   Synthèse : Ces fonctions sont clairement solutions.
   Conclusion : $S = \{f : x \mapsto ax \quad | a \in \mathbb{R}\}$.

<u>Problème C :</u>

a) On calcule $\Delta = 400 - 320 = 80$ donc les solutions sont $X_1 = \frac{20-\sqrt{80}}{32} = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$ et $X_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$.

b) Comme $4 < 5 < 9$, on a $2 < \sqrt{5} < 3$ donc $0 < 5 - \sqrt{5} < 4 < 5 + \sqrt{5}$. Donc $\frac{5-\sqrt{5}}{8} < \frac{1}{2} < \frac{5+\sqrt{5}}{8}$. Et comme tous les termes sont positifs, $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$.

c) En remplaçant x par $\frac{\pi}{10}$ dans (E) et comme $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, on a :
$16\cos^5(\frac{\pi}{10}) - 20\cos^3(\frac{\pi}{10}) + 5\cos(\frac{\pi}{10}) = 0$. Posons alors $X = \cos(\frac{\pi}{10})$, on a :
$16X^5 - 20X^3 + 5X = 0$ ssi $X(16X^4 - 20X^2 + 5) = 0$. En utilisant la question a), on obtient : $X = 0$ ou $X = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ ou $X = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ ou $X = -\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$ ou $X = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$.

Comme $0 < \frac{\pi}{10} < \frac{\pi}{4}$, on a $\cos(\frac{\pi}{10}) > \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc finalement $\boxed{\cos(\frac{\pi}{10}) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}}$.

d) Comme $\sin(\frac{\pi}{10}) > 0$, on a : $\sin(\frac{\pi}{10}) = \sqrt{1 - \cos^2(\frac{\pi}{10})} = \sqrt{1 - \frac{5+\sqrt{5}}{8}} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}$.

e) D'après la question b), on a : $16\cos^4(\frac{\pi}{10}) - 20\cos^2(\frac{\pi}{10}) + 5 = 0$ donc
$16(1-\sin^2(\frac{\pi}{10}))^2 - 20(1-\sin^2(\frac{\pi}{10})) + 5 = 0$ donc $16\sin^4(\frac{\pi}{10}) - 12\sin^2(\frac{\pi}{10}) + 1 = 0$. Or $4\sin^2(\frac{\pi}{10}) + 2\sin(\frac{\pi}{10}) - 1 = 0$ ssi $1 - 4\sin^2(\frac{\pi}{10}) = 2\sin(\frac{\pi}{10})$
ssi $(4\sin^2(\frac{\pi}{10}) - 1)^2 = (2\sin(\frac{\pi}{10}))^2$ ssi $16\sin^4(\frac{\pi}{10}) - 8\sin^2(\frac{\pi}{10}) + 1 = 4\sin^2(\frac{\pi}{10})$. CQFD

f) En posant $X = \sin(\frac{\pi}{10})$ dans e), on a $4X^2 + 2X - 1 = 0$ dont les solutions sont $X_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $X_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.
Comme $\sin(\frac{\pi}{10}) > 0$, on obtient $\boxed{\sin(\frac{\pi}{10}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}}$.

<u>Problème D :</u>

1. En tant que composée de fonctions dérivables, f est dérivable sur $[1, \mathrm{e}^{\pi}]$, et pour tout $x \in [1, \mathrm{e}^{\pi}]$, $f'(x) = \frac{1}{x} \times (-\sin(\ln(x)))$.
2. Pour tout $x \in [1, \mathrm{e}^{\pi}]$, $\frac{1}{x} > 0$, et, par croissance de ln, $\ln(1) \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(\mathrm{e}^{\pi})$, c'est-à-dire $0 \leqslant \ln(x) \leqslant \pi$: par conséquent, $\sin(\ln(x)) \geqslant 0$.
   On en déduit que f' est à valeurs négatives sur $[1, \mathrm{e}^{\pi}]$, et, plus précisément, que f' ne s'annule qu'en 1 et en e^{π}. f est donc strictement décroissante sur $[1, \mathrm{e}^{\pi}]$.
3. f étant continue et strictement décroissante sur $[1, \mathrm{e}^{\pi}]$, d'après le théorème de la bijection, elle établit une bijection de $[1, \mathrm{e}^{\pi}]$ sur $[f(\mathrm{e}^{\pi}), f(1)] = [-1, 1]$.
4. D'après le théorème de la bijection, φ est, tout comme f, strictement décroissante et continue, et, puisque $\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(\mathrm{e}^{\pi}) = -1 \end{cases}$, $\begin{cases} \varphi(1) = 1 \\ \varphi(-1) = \mathrm{e}^{\pi} \end{cases}$, on obtient le tableau de variations suivant :

x	-1		1
$\varphi(x)$	e^{π}	$\searrow$	1

5. Puisque f est dérivable sur $[1, \mathrm{e}^{\pi}]$, et comme f' ne s'annule qu'en 1 et e^{π}, φ est dérivable en tout point de l'intervalle $[-1, 1] \setminus \{f(1), f(\mathrm{e}^{\pi})\} =]-1, 1[$. En outre, φ n'est pas dérivable en -1 et 1.
6. L'annulation de f' en 1 et en e^{π} entraîne que la représentation graphique de φ admet, aux points d'abscisses $f(1)$ et $f(\mathrm{e}^{\pi})$ (c'est-à-dire 1 et -1), des tangentes verticales.

7. $\varphi(0)$ est, par définition, l'unique antécédent de 0 par f : il s'agit donc de l'unique solution de l'équation $\cos(\ln(x)) = 0$ dans $[1, \mathrm{e}^{\pi}]$.
   Or, pour tout $x \in [1, \mathrm{e}^{\pi}]$: $\cos(\ln(x)) = 0 \iff \exists\, k \in \mathbb{Z} \mid \ln(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff \exists\, k \in \mathbb{Z} \mid x = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+k\pi}$
   La seule solution, parmi celles obtenues, appartenant à $[1, \mathrm{e}^{\pi}]$, est $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$.
   Ainsi, $\varphi(0) = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$, et donc $\varphi'(0) = \frac{1}{f'\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{-\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}} \times \sin\left(\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}\right)\right)} = -\frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$.

8. (a) Soit $x \in [-1, 1]$.
   i. $\cos(\ln(\varphi(x))) = f(\varphi(x)) = x$, car φ est la réciproque de f.
   ii. D'autre part, $\sin^2(\ln(\varphi(x))) = 1 - \cos^2(\ln(\varphi(x))) = 1 - x^2$.
   De plus, $1 \leqslant \varphi(x) \leqslant \mathrm{e}^{\pi}$, donc, par croissance de ln, $0 \leqslant \ln(\varphi(x)) \leqslant \pi$.
   Puisque, sur $[0, \pi]$, la fonction sinus ne prend que des valeurs positives, on déduit de ce qui précède : $\sin(\ln(\varphi(x))) = \sqrt{1 - x^2}$.

   (b) Pour tout $x \in]-1, 1[$, $\varphi'(x) = \dfrac{1}{f'(\varphi(x))} = \dfrac{1}{-\frac{\sin(\ln(\varphi(x)))}{\varphi(x)}} = -\dfrac{\varphi(x)}{\sqrt{1 - x^2}}$.

9. f' est dérivable sur $[1, \mathrm{e}^{\pi}]$ par théorème opératoire donc f est deux fois dérivable et $\forall x \in [1, \mathrm{e}^{\pi}]$, $f''(x) = \frac{\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x))}{x^2}$.

10. Sur $[1; \pi]$, $\sin(y) - \cos(y) \leq 0$ ssi $y \leq \frac{\pi}{4}$ donc, en posant $y = \ln(x)$, on obtient

x	1		$\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$		e^{π}
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f		*concave*		*convexe*	

   et il y a un point d'inflexion en $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$.

11. L'équation de la tangente à f en $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$ est $y = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}x$ donc, par convexité, pour tout $x \in \left[\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}, \mathrm{e}^{\pi}\right]$, $1 - \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}x \leq f(x)$.