$\boxed{\text{Devoir sur table 2 : Mathématiques}}$

Le 8 Octobre 2021, MPSI, Lycée Dessaignes

L'épreuve dure 2h et l'usage des calculatrices est interdit. Veuillez numéroter vos pages et $\boxed{\textit{encadrer}}$ *vos résultats. Attention à la rédaction !*

Problème A :

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\exp\left(x\sqrt{x}\right) - 1}{\sqrt{x}}$.

1. Justifier que f est dérivable, et calculer sa dérivée.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
   On notera $\tilde{f}$ son prolongement.
3. Montrer que $\tilde{f}$ est dérivable en 0, et préciser la valeur de $\tilde{f}'(0)$.
4. (a) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(t) = 3t\exp(t) - \exp(t) + 1$.
      i. Etudier les variations de g.
      ii. En déduire le signe de $g(t)$, selon les valeurs de t.
   (b) Déduire de ce qui précède les variations de f.
5. Préciser, si elle existe, la limite de f en $+\infty$.
6. Dessiner l'allure de la représentation graphique de $\tilde{f}$.
   On fera apparaître les éléments mis en lumière dans les questions précédentes.
7. Montrer que $\tilde{f}'$ est continue en 0.

Problème B :

1. Pour chacun des énoncés suivants, convertir en langage formalisé, ou inversement convertir en langage usuel puis donner la négation, et enfin démontrer l'énoncé ou sa négation selon qu'il est vrai ou faux.
   (a) Tout nombre réel non nul possède un inverse.
   (b) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 0$.
2. On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1}a_{n-1} \end{cases}$.
   Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq a_n \leq n^2$.
3. En raisonnant par analyse-synthèse, trouver l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Problème C :

On admet que :

$$(E)\ \forall x \in \mathbb{R},\ \cos(5x) = 16\cos^5(x) - 20\cos^3(x) + 5\cos(x)$$

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $16X^2 - 20X + 5 = 0$.

b) Montrer que : $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$

c) Déterminer la valeur de $\cos(\frac{\pi}{10})$ en évaluant en $\frac{\pi}{10}$ l'équation (E).

d) En déduire la valeur de $\sin(\frac{\pi}{10})$.

e) Montrer que $4\sin^2(\frac{\pi}{10}) + 2\sin(\frac{\pi}{10}) - 1 = 0$.

f) En déduire une écriture plus simple de $\sin(\frac{\pi}{10})$.

Problème D :

Soit f la fonction définie sur $[1, \mathrm{e}^{\pi}]$ par $f(x) = \cos(\ln(x))$.

1. Justifier que f est dérivable sur $[1, \mathrm{e}^{\pi}]$, et calculer sa dérivée.
2. Etudier les variations de f.
3. Montrer que f établit une bijection de $[1, \mathrm{e}^{\pi}]$ sur un intervalle I que l'on précisera.
   On note φ la réciproque de f.
4. Dresser le tableau de variations complet de φ.
5. Etudier la dérivabilité de φ sur I.
6. Préciser l'allure de la représentation graphique de φ au voisinage des points d'abscisse 1 et -1.
7. Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi'(0)$.
8. (a) Simplifier, pour tout $x \in I$, $\cos(\ln(\varphi(x)))$, puis exprimer $\sin(\ln(\varphi(x)))$ en fonction de x.
   (b) Déduire de ce qui précède une expression de $\varphi'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$ et de x, en tout réel x où φ est dérivable.
9. Montrer que f est deux fois dérivable et calculer f'' sur $[1, \mathrm{e}^{\pi}]$.
10. Après avoir étudier le signe de $\sin(y) - \cos(y)$ sur $[0; \pi]$, déduire la convexité ou concavité ainsi que les éventuels points d'inflexion de f.
11. Montrer que, pour tout $x \in \left[\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}, \mathrm{e}^{\pi}\right]$, $1 - \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}x \leq f(x)$.
    On pourra chercher la tangente à f en $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$.