Correction du devoir sur table 1 : Mathématiques

MPSI, Lycée Dessaignes

Exercice 1 :

1. On remarque tout d'abord que les quotients ne sont pas définis pour $x=-1$ ou $x=1$. Le domaine de résolution est donc $]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$. Sur ce domaine, on a

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}=\sqrt{3} \\
ssi \quad & \frac{x-1+x+1-\sqrt{3}(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=0 \\
ssi \quad & \frac{-\sqrt{3}x^2+2x+\sqrt{3}}{(x+1)(x-1)}=0 \\
ssi \quad & -\sqrt{3}x^2+2x+\sqrt{3} \quad \text{sur le domaine de résolution.}
\end{aligned}$$

On calcule $\Delta=16$ et les deux solutions sont $x_1=\frac{-2+4}{-2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $x_2=\sqrt{3}$. $\boxed{S=\{-\frac{\sqrt{3}}{3};\sqrt{3}\}}$.

2. On remarque tout d'abord que les quotients ne sont pas définis pour $x=2$ ou $x=5$. Le domaine de résolution est donc $]-\infty;2[\cup]2;5[\cup]5;+\infty[$. Sur ce domaine, on a $\frac{x+2}{x-2}\leq\frac{x-3}{x-5}$ $\quad ssi \quad$ $\frac{(x+2)(x-5)-(x-3)(x-2)}{(x-2)(x-5)}\leq 0$ $\quad ssi \quad$ $\frac{2x-16}{(x-2)(x-5)}\leq 0$.
On dresse alors le tableau de signes :

x	$-\infty$		2		5		8		$+\infty$
$2x-16$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{2x-16}{(x-2)(x-5)}$		$-$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$	

On a donc $\boxed{S=]-\infty;2[\cup]5;8]}$.

3. Comme tout est positif, $|2x-4|\leq|x+2|$ ssi $(2x-4)^2\leq(x+2)^2$ ssi $3x^2-20x+12\leq 0$. On calcule $\Delta=16^2$ donc on pose $x_1=\frac{20-16}{6}=\frac{2}{3}$ et $x_2=6$.
Finalement, comme $3>0$, on obtient : $\boxed{S=\left[\frac{2}{3};6\right]}$.

4. On étudie d'abord le domaine de définition. Pour le polynôme $3x^2-8x-10$, on a $\Delta=4\times 46$, on pose donc $x_1=\frac{8-2\sqrt{46}}{6}=\frac{4-\sqrt{46}}{3}$ et $x_2=\frac{4+\sqrt{46}}{3}$. Comme $3>0$, le domaine de définition est $]-\infty;x_1]\cup[x_2;+\infty[$.
Ensuite, remarquons que si $2x-5<0$, c'est à dire $x<\frac{5}{2}$ alors x est solution.
Il reste à étudier le cas $x\geq\frac{5}{2}$. On peut ici élever au carré car tout est positif, on obtient alors $3x^2-8x-10>4x^2-20x+25$ donc $0>x^2-12x+35$. Les racines 5 et 7 sont évidentes donc finalement, on obtient $\boxed{S=]-\infty;x_1]\cup]5;7[}$.

Exercice 2 :

1. Pour tous réels x, y on a : $(x+y)^2 - 4xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 \geq 0$ donc $(x+y)^2 \geq 4xy$.

2. Comme a, b, c sont strictement positifs, par passage au carré, on a :
$(b+c)(c+a)(a+b) \geq 8abc$ ssi $(b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2 \geq 64a^2b^2c^2$.
Or en appliquant la question 1 avec b, c puis a, c puis a, b, on a :
$(b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2 \geq 4bc \times 4ac \times 4ab = 64a^2b^2c^2$.

3. $(S-a)(S-b)(S-c) = S^3 - S^2(a+b+c) + S(ab+ac+bc) - abc$ or $S = a+b+c$ donc $S^2(a+b+c) = S^3$ et $(S-a)(S-b)(S-c) = S(ab+ac+bc) - abc$.

4. En utilisant 2., on a : $(b+c)(c+a)(a+b) \geq 8abc$ donc $(S-a)(S-b)(S-c) \geq 8abc$.
En utilisant 3., on obtient $S(ab+ac+bc) - abc \geq 8abc$ donc $S(ab+ac+bc) \geq 9abc$. Finalement, $\frac{S(ab+ac+bc)}{abc} \geq 9$, c'est à dire $(a+b+c)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right) \geq 9$.

Exercice 3 :

1. Clairement $(1,2)\mathcal{R}(5,-1)$ mais on n'a pas $(5,-1)\mathcal{R}(1,2)$. On n'a pas $(-1,4)\mathcal{R}(-4,2)$ mais on a $(-4,2)\mathcal{R}(-1,4)$.
2. — $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} x+y \leq x+y \\ x-y \leq x-y \end{cases}$ donc $\mathcal{R}$ est réflexive.
   — $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\forall (x',y') \in \mathbb{R}^2$, si $(x,y)\mathcal{R}(x',y')$ et $(x',y')\mathcal{R}(x,y)$, on a $\begin{cases} x+y \leq x'+y' \\ x'+y' \leq x+y \\ x-y \leq x'-y' \\ x'-y' \leq x-y \end{cases}$ donc $\begin{cases} x+y = x'+y' \\ x-y = x'-y' \end{cases}$.
   En ajoutant et soustrayant les équations, on obtient $x = x'$ et $y = y'$ donc $\mathcal{R}$ est antisymétrique.
   — $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\forall (x',y') \in \mathbb{R}^2$, $\forall (x'',y'') \in \mathbb{R}^2$, si $(x,y)\mathcal{R}(x',y')$ et $(x',y')\mathcal{R}(x'',y'')$ alors $\begin{cases} x+y \leq x'+y' \\ x'+y' \leq x''+y'' \\ x-y \leq x'-y' \\ x'-y' \leq x''-y'' \end{cases}$ donc $\begin{cases} x+y \leq x''+y'' \\ x-y \leq x''-y'' \end{cases}$ donc $\mathcal{R}$ est transitive.

   Donc $\mathcal{R}$ est bien une relation d'ordre.
3. $\forall (x,y,y') \in \mathbb{R}^3$, $(x,y)\mathcal{R}(x,y')$ ssi $\begin{cases} x+y \leq x+y' \\ x-y \leq x-y' \end{cases}$ ssi $y = y'$.
4. D'après la question précédente, on ne peut pas comparer $(0,1)$ et $(0,2)$ donc la relation d'ordre n'est pas totale.

Exercice 4 :

1. — $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = f(x)$ donc $\sim$ est réflexive.
   — $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, si $f(x) = f(y)$ alors $f(y) = f(x)$ donc $\sim$ est symétrique.
   — $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, si $f(x) = f(y)$ et $f(y) = f(z)$ alors $f(x) = f(z)$ donc $\sim$ est transitive.

   Donc $\sim$ est une relation d'équivalence.
2. $\mathcal{C}_2 = \{x \in \mathbb{R} | f(x) = f(2)\} = \{x \in \mathbb{R} | x^2 = 4\} = \{-2; 2\}$.
3. $\mathcal{C}_0 = \{x \in \mathbb{R} | f(x) = f(0)\} = \{x \in \mathbb{R} | x^3 - 3x^2 + 2x - 3 = -3\} = \{x \in \mathbb{R} | x^3 - 3x^2 + 2x = 0\} = \{0; 1; 2\}$.
4. (a) $f(-1) = 0$.
   (b) Il suffit de développer pour obtenir $a = 2$ et $b = -15$.
   (c) $\mathcal{C}_{-1} = \{x \in \mathbb{R} | f(x) = f(-1)\} = \{x \in \mathbb{R} | x^3 + 3x^2 - 13x - 15 = 0\} = \{x \in \mathbb{R} | (x+1)(x^2 + 2x - 15) = 0\} = \{-5; -1; 3\}$.

Exercice 5 :

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, notons $s = x - \lfloor x \rfloor$ et $t = y - \lfloor y \rfloor$. Par définition, $s \in [0;1[$ et $t \in [0;1[$. On a alors $x + y = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + s + t$.
On a donc 2 cas :

$s + t < 1$: Dans ce cas, $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ donc $\lfloor x \rfloor + \lfloor x+y \rfloor + \lfloor y \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 2\lfloor y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.

$1 \leq s + t < 2$: Dans ce cas, $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$ donc $\lfloor x \rfloor + \lfloor x+y \rfloor + \lfloor y \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 2\lfloor y \rfloor + 1$. Mais ou bien $s \geq 0.5$ et $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1$ ou bien $t \geq 0.5$ et $\lfloor 2y \rfloor = 2\lfloor y \rfloor + 1$. Dans les deux cas, $\lfloor x \rfloor + \lfloor x+y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.