$\boxed{\text{Devoir sur table 1 : Mathématiques}}$

Le 10 Septembre 2021

MPSI, Lycée Dessaignes

L'épreuve dure 2h00 et l'usage des calculatrices est interdit. Veuillez laisser un en-tête, numéroter vos pages et $\boxed{\textit{encadrer}}$ *vos résultats. Attention à la rédaction !*

Exercice 1 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \sqrt{3}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $\frac{x+2}{x-2} \leq \frac{x-3}{x-5}$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $|2x-4| \leq |x+2|$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $\sqrt{3x^2-8x-10} > 2x-5$.

Exercice 2 :

1. Montrer que pour tous réels x, y, on a : $(x+y)^2 \geq 4xy$.
2. En déduire que pour tous réels strictement positifs a, b, c, on a :
$$(b+c)(c+a)(a+b) \geq 8abc$$
3. En notant $S = a+b+c$, développer et simplifier le produit :
$$(S-a)(S-b)(S-c)$$
4. Déduire de 2. et 3. que :
$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$$

Exercice 3 :

On définit la relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\forall (x',y') \in \mathbb{R}^2$,
$(x,y)\mathcal{R}(x',y')$ ssi $\begin{cases} x+y \leq x'+y' \\ x-y \leq x'-y' \end{cases}$

1. A-t-on $(1,2)\mathcal{R}(5,-1)$? $(5,-1)\mathcal{R}(1,2)$? Même question pour $(-1,4)$ et $(-4,2)$.
2. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.
3. Soit $(x,y,y') \in \mathbb{R}^3$, montrer que $(x,y)\mathcal{R}(x,y')$ ssi $y = y'$.
4. Cette relation d'ordre est-elle totale ?

Exercice 4 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on définit la relation $\sim$ sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall x' \in \mathbb{R}$, $x \sim x'$ ssi $f(x) = f(x')$.

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
2. Dans cette question uniquement, on considère $f(x) = x^2$.
   Donner la classe d'équivalence de 2.
3. Dans cette question uniquement, on considère $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 3$.
   Donner la classe d'équivalence de 0.
4. Dans cette question uniquement, on considère $f(x) = x^3 + 3x^2 - 13x - 15$.
   (a) Calculer $f(-1)$.
   (b) En déduire qu'il existe (a, b) dans $\mathbb{R}^2$ tel que :
   $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)(x^2 + ax + b)$.
   (c) En déduire la classe d'équivalence de -1.

Exercice 5 :

Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \lfloor x \rfloor + \lfloor x + y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.