$\boxed{\text{DM 2.}}$

À rendre le 11/10

Exercice 1

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2}{\sin(2x)} - \dfrac{1}{\sin(x)}$.

0. *Question préliminaire*
   Montrer qu'il existe un unique angle α dans l'intervalle $[0,\pi]$ qui vérifie $\cos(\alpha) = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
   Cet angle α est-il supérieur ou inférieur à $\frac{\pi}{2}$?
1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Réduire au maximum le domaine d'étude de f.
3. (a) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On admettra $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$ (les plus téméraires pourront essayer de le démontrer). *On note $\tilde{f}$ le prolongement ainsi obtenu.*
   (b) $\tilde{f}$ est-elle dérivable en 0 ?
4. (a) Justifier que f est dérivable en tout point de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$, et calculer sa dérivée.
   (b) Montrer que, pour tout $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$, $f'(x)$ est du même signe que $\cos^3(x) - 2\cos^2(x) + 1$.
   (c) En déduire les variations de f sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$.
   On pourra commencer par remarquer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $t^3 - 2t^2 + 1 = (t-1)(t^2-t-1)$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = \left(1-x^2\right)^x$.

1. Montrer que f est définie sur $]-1,1]$.
2. f est-elle continue en 1 ? est-elle dérivable en 1 ?
   Pour la deuxième question, on commencera par justifier que, pour tout $x \in]-1,1[$:
   $$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -(1-x)^{x-1}(1+x)^x$$
3. Déterminer, si elle existe, la limite de f en -1.
4. Justifier la dérivabilité de f sur l'intervalle $]-1,1[$, et calculer sa dérivée.
5. Etudier les variations de f.
6. (a) Montrer que f établit une bijection de $]-1,1]$ sur un intervalle I que l'on précisera.
   On notera g la réciproque de f.
   (b) Etudier la continuité et la dérivabilité de g sur I.
   (c) Calculer, si ces nombres existent, $g(0)$, $g'(0)$, $g(1)$ et $g'(1)$.
7. Dessiner, sur un même graphique, les courbes représentatives de f et de g.

Exercice 3

On cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 = 3+4i$.

1. Montrer que $z^2 = 3+4i \Leftrightarrow z^2 = 3+4i$ **et** $|z|^2 = 5$.
2. En écrivant z sous forme algébrique, $z = a+ib$, montrer que : $z^2 = 3+4i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2 = 3 \\ a^2+b^2 = 5 \\ ab = 2 \end{cases}$.
3. En déduire les solutions de l'équation.