

DM 1.

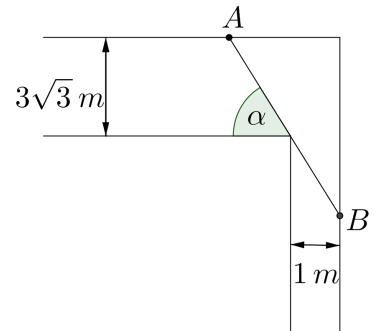
- Exercice 1 :** 1. Résoudre l'équation $\sqrt{x^2 - 2x + 2} = x - 2$, d'inconnue réelle x .
 2. Résoudre l'inéquation $\sqrt{x^2 - 5x + 6} \leq x + 3$, d'inconnue réelle x .

Exercice 2 : Un couloir de musée de largeur $3\sqrt{3}$ mètres tourne à angle droit et sa largeur n'est plus que de 1 mètre. On veut transporter dans ce couloir un tableau en position verticale. L'objectif est de déterminer la largeur maximale possible du tableau que l'on peut ainsi déplacer dans le couloir.

1. Exprimer la longueur AB de la figure ci-contre en fonction de α .

On pose $AB = f(\alpha)$.

On se propose d'étudier la fonction f .



2. Donner le domaine de définition de f .

Sur quel intervalle I étudier la fonction f ?

3. Justifier que f est dérivable sur I puis calculer f' .
 4. On veut déterminer le signe de f' sur I .

Soit $\alpha \in I$.

- (a) Justifier que $f'(\alpha)$ est du signe de $\sin^3(\alpha) - 3\sqrt{3} \cos^3(\alpha)$.
 (b) Étant donné deux réels a et b , développer l'expression $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$.
 (c) En déduire que $f'(\alpha)$ est du signe de $\sin(\alpha) - \sqrt{3} \cos(\alpha)$.
 (d) Conclure.

5. Dresser le tableau de variations de f sur I .

Quelle est la largeur maximale du tableau que l'on peut transporter dans le couloir?

- Exercice 3 :** 1. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer l'implication suivante : 3 divise $n^2 \Rightarrow 3$ divise n .
 2. Montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel.
 3. En déduire l'équivalence suivante : $\forall a \in \mathbb{Z}, \forall b \in \mathbb{Z}, a + b\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$.

Exercice 4 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par :

$$u_0 = 1, u_1 = \sqrt{2}, u_{n+2} = \sqrt{u_n + \frac{1}{u_{n+1}}}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 2$.