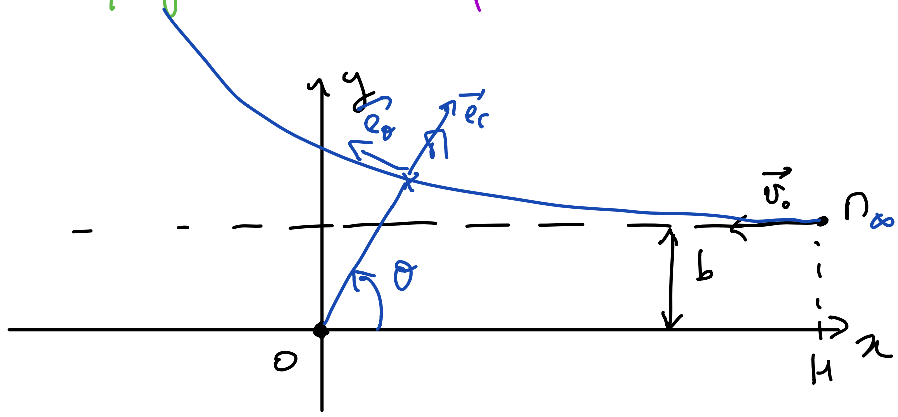
Exercice 3 :

part α → noyeaux He $\quad {}^{2}_{4}He$



1) La particule α est soumise à l'interaction coulombienne de répulsion de la part du noyau en O :

$$\vec{F} = \frac{q_M q_o}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r}$$

q_M : la charge de la part α

q_o : la charge du noyau d'or.

$r = OM$

$\vec{e_r} = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$ ou On définit un repère polaire associé à M $(O, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ par rapport à O

Or :

→ $q_M = 2e$

→ $q_o = Z_{Au} \times e = Ze$

Ainsi, $\boxed{\vec{F} = \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r}}$ $\qquad$ Ainsi, $K = \frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0}$

La force est newtonienne : $\mathcal{E}p(r) = \frac{K}{r} + cste = \frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0 r} + cste$.

On choisit cste telle que $\lim\limits_{r\to\infty} \mathcal{E}p(r) = 0 \Rightarrow cste = 0$.

$$\boxed{\mathcal{E}p(r) = \frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$

2) La particule α n'est soumise qu'à la force newtonienne sus-citée qui est conservative. Le système étudié est donc conservatif, son énergie mécanique se conserve.

À l'instant initial : $\mathcal{E}_{m,i} = \mathcal{E}_{c,i} + \mathcal{E}_{p,i}$

$$= \frac{1}{2} m v_0^2 + 0 = \frac{1}{2} m v_0^2$$

À tout instant, $\boxed{\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m v_0^2}$

3) → $\vec{L}_O(M) = \vec{OM} \wedge \vec{p} = (\vec{OM} \wedge \vec{v})\, m$

Or, on s'est placés dans le repère polaire $(O, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ à la question 1.

Ainsi, $\vec{OM} = r\vec{e_r}$ et $\vec{v} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$.

Donc, $\vec{L}_O(M) = r\vec{e_r} \wedge (\dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta})\, m = r^2\dot{\theta}\,\vec{e_z} \times m$

avec $\vec{e_z} = \vec{e_r} \wedge \vec{e_\theta} = \vec{cst}$.

→ On est dans un ref galiléen, appliquons le TMC :

$$\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} = \mathcal{M}_O(\vec{F}) = \vec{0}$$ car $\vec{F}$ est une force centrale donc colinéaire à $\vec{OM}$.

Ainsi, $\vec{L}_O(M) = \vec{cste} = \vec{L}_O(M, t=0) = \vec{OM}(t=0) \wedge m\vec{v}(t=0)$

$$= \vec{OM_\infty} \wedge m\vec{v_0}$$

$$= \underbrace{\vec{HM_\infty}}_{b\vec{e_y}} \wedge m\underbrace{\vec{v_0}}_{-v_0\vec{e_x}} = b \times v_0 \times m\,\vec{e_z}.$$

avec $\vec{e_z} = \vec{e_x} \wedge \vec{e_y}$.

Ainsi, $\boxed{r^2\dot{\theta} = b v_0}$

4) $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m v^2 + \mathcal{E}_p(r) = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\right) + \frac{K}{r} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m (r\dot{\theta})^2 + \frac{K}{r}$

$= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \mathcal{E}_p^*(r)$

avec $\mathcal{E}_p^*(r) = \frac{1}{2} m (r\dot{\theta})^2 + \frac{K}{r} = \underline{\frac{1}{2} m \frac{(b v_0)^2}{r^2} + \frac{K}{r}}$

Cette énergie est appelée énergie potentielle effective.

5) En $r_{min} \rightarrow \dot{r} = 0$ car r est minimal :

Ainsi, $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_p^*(r_{min}) \overset{4)}{=} \frac{1}{2} m \frac{b^2 v_0^2}{r_{min}^2} + \frac{K}{r_{min}} \overset{CI}{=} \frac{1}{2} m v_0^2$

$\times r_{min}^2$

$\frac{1}{2} m b^2 v_0^2 + K \underline{r_{min}} - \frac{1}{2} m v_0^2 \underline{r_{min}^2} = 0.$

$r_{min}^2 - \frac{2K}{m v_0^2} r_{min} - b^2 = 0.$ On obtient une équation du 2nd degré en r_{min}.

On la résout :

$\Delta = \frac{4K^2}{m^2 v_0^4} + 4b^2 = 4\left(\frac{K^2}{m^2 v_0^4} + b^2\right)$

Ainsi, on obtient 2 racines : $r_{min_1} = \frac{\frac{2K}{m v_0^2} + \sqrt{\Delta}}{2}$ $\quad r_{min_2} = \frac{\frac{2K}{m v_0^2} - \sqrt{\Delta}}{2}$

$\sqrt{\Delta} > \frac{2k}{mv_0^2}$ donc $r_{min_2} < 0$ or, r est le rayon en polaires donc positif par définition.

Ainsi, $r_{min} = r_{min_1} = \dfrac{\frac{\cancel{2}k}{mv_0^2} + \cancel{2}\sqrt{\frac{k^2}{m^2v_0^4} + b^2}}{\cancel{2}}$

Donc, $\boxed{r_{min} = \frac{k}{mv_0^2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{b^2m^2v_0^4}{k^2}}\right)}$

6) $\tan\frac{D}{2} = \frac{k}{mbv_0^2} \Rightarrow b = \frac{k}{mv_0^2\tan\frac{D}{2}} = \frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0 m v_0^2 \tan\frac{D}{2}}$

$b_1 = 2,4 \times 10^{-14}\,m \Rightarrow r_{1min} = 2,4 \times 10^{-14}\,m$

$b_2 = 0 \Rightarrow r_{2min} = 2,7 \times 10^{-14}\,m$

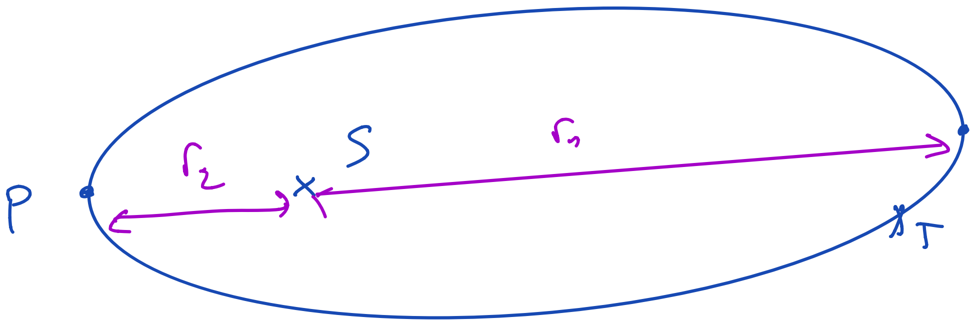
ODG taille du noyau $\sim 10^{-14}\,m$.

$\boxed{10^{-10}\,m}$

Exercice 1

$v_1 = 2,93 \times 10^4 \, m/s$

$v_2 = \,?$



$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{p,eff} + \cancel{\frac{1}{2} m \dot{r}^2}$ ($\dot{r} = 0$)

On sait que $C = r^2\dot{\theta}$ est une constante du mouvement. Or $\vec{v} = \underbrace{\dot{r}}_{=0}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$ donc $C = r \times r\dot{\theta} = r \times v$.

↳ à l'aphélie et au périhélie.

Ainsi, $r_1 v_1 = r_2 v_2$

$$v_2 = \frac{r_1}{r_2} v_1$$

<u>AN</u> : $\boxed{v_2 = 3,03 \times 10^4 \, m \cdot s^{-1}}$

Exercice 2

1/ Système : Astronaute de masse m, assimilé au point M. On l'étudie dans le référentiel géocentrique qui est supposé galiléen.

Le point M est soumis à :

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{G m M_0}{r^2}\vec{u_r}}$$

avec $\vec{u_r} = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$ (OU) $\vec{u_r}$ vecteur unitaire de la base polaire $(O, \vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ associée au mouvement de M par rapport à O.

r la distance $\|\vec{OM}\|$.

Cette force est conservative donc elle dérive d'une énergie potentielle :

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{dr} = -F \Rightarrow \mathcal{E}_p(r) = -\frac{G m M_0}{r} + cste.$$

On choisit cste telle que $\lim_{r\to\infty} \mathcal{E}_p(r) = 0$ donc cste $= 0$.

$$\boxed{\mathcal{E}_p(r) = -\frac{G m M_0}{r}}$$

2) On est dans un RG, on peut appliquer le PFD à M :
référentiel galiléen (RG)

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

Or, on étudie le mouvement de M dans un référentiel polaire et M est en mouvement circulaire uniforme, donc $\vec{a} = -\frac{v^2}{r}\vec{u_r}$

Ainsi, $-m\frac{v^2}{r}\vec{u_r} = -\frac{GmM_0}{r^2}\vec{u_r}$

Projetons sur $\vec{u_r}$:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM_0}{r^2} \Rightarrow \left| v = \sqrt{\frac{GM_0}{r}} \right. \quad (1)$$

Or, la période T est liée à la pulsation ω par : $T = \frac{2\pi}{\omega}$ et $\omega = \dot{\theta}$.

De plus, $v = r\dot{\theta}$ car le mouvement est circulaire, donc :

$$(2)\quad T = \frac{2\pi}{v} \times r = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{GM_0}{r}}} \times r.$$

Ainsi, $\boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_0}}$

Par définition, $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM_0}{r} \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}m\frac{GM_0}{r} - \frac{GmM_0}{r}$

$$\boxed{\mathcal{E}_m = -\frac{GmM_0}{2r}}$$

3) → D'après la 3^e loi de Kepler :

$$\frac{T_S^2}{r_S^2} = \frac{4\pi^2}{GM_0}$$ avec r_S le rayon de l'orbite de l'ISS.

✓ ✓ ?

$$\frac{T_H^2}{r_H^3} = \frac{4\pi^2}{GM_0}$$ avec r_H le rayon de l'orbite de Hubble.

Ainsi, $\boxed{T_S = T_H \sqrt{\frac{r_S^3}{r_H^3}}}$

$T_H = 97$ min

$r_S = R_T + h_S$ ~ altitude ISS

$r_H = R_T + h_H$ ~ altitude de Hubble

AN : $r_S = 6800$ km

$r_H = 7000$ km.

AN : $\boxed{T_S = 93 \text{ min}}$.

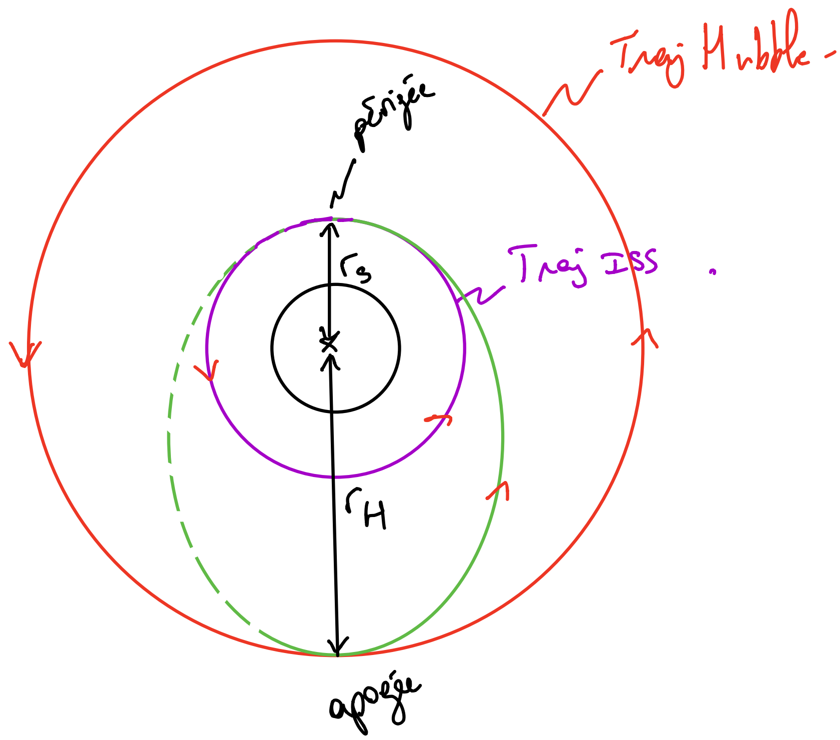
→ On a vu précédemment[2] que $v_S = \frac{2\pi r_S}{T_S}$ et $v_H = \frac{2\pi r_H}{T_H}$

L'application numérique donne ainsi :

$v_S = 7{,}7 \times 10^3$ m/s. $= 4{,}6 \times 10^2$ km/min.

$v_H = 7{,}5 \times 10^3$ m/s.

4)



5) $$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - \frac{G m M_T}{r}}_{\mathcal{E}_{p,eff}}$$

Or, le système est conservatif donc :

$$\underbrace{\mathcal{E}_m = \text{cste} = \mathcal{E}_{m_S}}_{\text{Énergie méca au périgée}} = \underbrace{\mathcal{E}_{m_P}}_{\text{Énergie méca à l'apogée}}$$

À l'apogée et au périgée, $\dot{r} = 0$ car r atteint ~~ses~~ deux extrema.

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r_S^2} - \frac{G m M_0}{r_S} = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r_H^2} - \frac{G m M_0}{r_H}$$

Ainsi : $\begin{cases} r_S^2 \mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m C^2 - G m M_0 r_S \\ r_H^2 \mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m C^2 - G m M_0 r_H \end{cases} \iff \begin{cases} r_S^2 \mathcal{E}_m + G m M_0 r_S - \frac{1}{2} m C^2 = 0 \\ r_H^2 \mathcal{E}_m + G m M_0 r_H - \frac{1}{2} m C^2 = 0 \end{cases}$

r_S et r_H sont les deux racines d'un même polynome de degré 2.

Ainsi, $r_S + r_H = -\dfrac{G m M_0}{\mathcal{E}_m} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_m = -\dfrac{G m M_0}{r_S + r_H}}$

6) $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m_H} = \dfrac{1}{2} m \dfrac{C^2}{r_H^2} - \dfrac{G m M_0}{r_H} = \dfrac{1}{2} m v_H^2 - \dfrac{G m M_0}{r_H}$

$$\text{Ainsi, } v_H = \sqrt{2 G M_0 \left(\frac{1}{r_H} - \frac{1}{r_S + r_H} \right)}$$

or $G M_0 = \dfrac{4\pi^2 r_H^3}{T_H^2}$ d'après la question 2/.

Donc, $v_H = \sqrt{2 \times \frac{4\pi^2 r_H^3}{T_H^2}\left(\frac{1}{r_H} - \frac{1}{r_S+r_H}\right)} = \sqrt{\frac{8\pi^2 r_H^2}{T_H^2} \times \frac{r_S}{r_S+r_H}}$

AN : $\boxed{v_H = 7,5 \text{ km/s}}$.

Par analogie : $v_S = \frac{2\pi r_S}{T_S}\sqrt{\frac{2 r_H}{r_S+r_H}} \Rightarrow \boxed{v_S = 7,7 \text{ km/s}}$

7) $\Delta t = \frac{T}{2}$ avec T la période du mouvement elliptique.

$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_0}$ d'après la 3ᵉ loi de Képler.

Ici, $a = \frac{r_S + r_H}{2}$

$GM_0 = \frac{4\pi^2 r_H^3}{T_H^2}$

$\Rightarrow T = \sqrt{\left(\frac{r_S+r_H}{2}\right)^3 \times \frac{T_H^2}{r_H^3}}$

$\times \frac{1}{2}$

AN : $\boxed{\Delta t = 47 \text{ min}}$.

$ax^2 + bx + c = 0$.

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$.