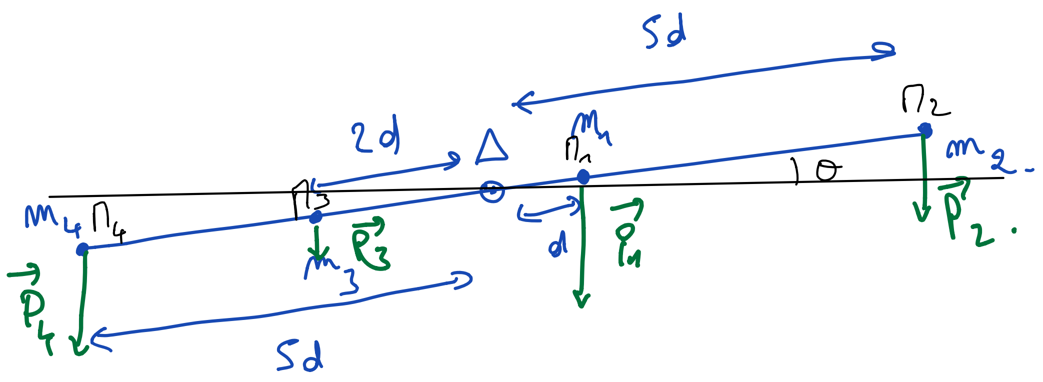
Exercice 1

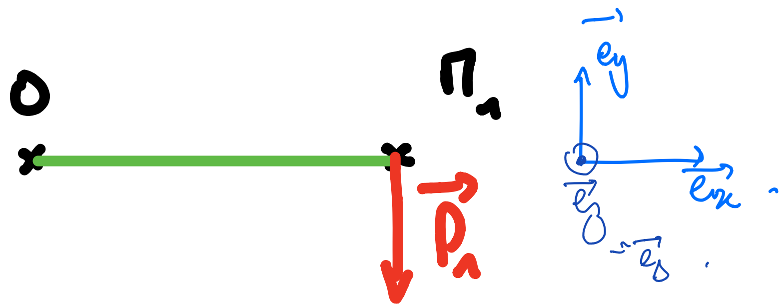
Version 1 :



1) BdF : 4 Poids : $\vec{P_1}, \vec{P_2}, \vec{P_3}, \vec{P_4}$ Système : {Tige + masse}

→ Méthode 1 : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P_1}) = \vec{\mathcal{M}_O}(\vec{P_1}) \cdot \vec{e_\Delta}$ avec $O \in \Delta$ et $\vec{e_\Delta}$ un vecteur unitaire de Δ. (directeur)

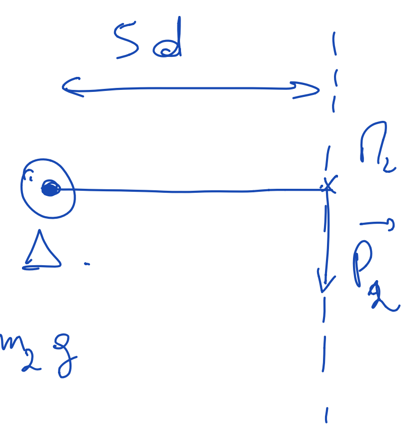
$\vec{\mathcal{M}_O}(\vec{P_1}) = \vec{OM_1} \wedge \vec{P_1} = d\vec{e_x} \wedge (-mg\vec{e_y})$



Donc, $\vec{\mathcal{M}_O}(\vec{P_1}) = -m_1 g d \, \vec{e_x} \wedge \vec{e_y} = -m_1 g d \, \vec{e_z} = -m_1 g d \cdot \vec{e_\Delta}$.

D'où, $\boxed{\mathcal{M}_\Delta(\vec{P_1}) = -m_1 g d}$

→ Méthode 2 : $|\mathcal{M}_\Delta(\vec{P_2})| = 5d \times \|\vec{P_2}\| = 5d \times m_2 g$



$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P_2}) < 0 \Rightarrow \boxed{\mathcal{M}_\Delta(\vec{P_2}) = -5d\, m_2 g}$

→ $|\mathcal{M}_\Delta(\vec{P_3})| = 2d\, m_3 g$ or $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P_3}) > 0$ donc $\boxed{\mathcal{M}_\Delta(\vec{P_3}) = 2d m_3 g}$

$\rightarrow \left|\mathcal{M}_\Delta(\vec{P_4})\right| = 5d\,m_4 g$ or $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P_4}) > 0$ donc $\boxed{\mathcal{M}_\Delta(\vec{P_4}) = 5dm_4 g}$

Référentiel galiléen, appliquons le TMC :

$$\frac{d\mathcal{L}_\Delta(\text{Tige})}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_\Delta(\vec{P_i}) = -m_1 gd - 5m_2 gd + 2dm_3 g + 5dm_4 g$$
$$= -5mgd - 5\times 3mgd + 2dmg + 5d\times 4mg$$
$$= (-20+22)mgd = 2mgd.$$

Donc $\mathcal{L}_\Delta(\text{Tige})$ augmente.

Si $\mathcal{L}_\Delta(\text{Tige}, 0) = 0 = J\omega \Rightarrow \boxed{\mathcal{L}_\Delta(\text{Tige}, t) > 0}$

La barre tourne dans le sens direct $\Rightarrow$ sens trigonométrique.

→ Bras de levier $|\mathcal{M}|$

→ Signe du moment

→ TMC

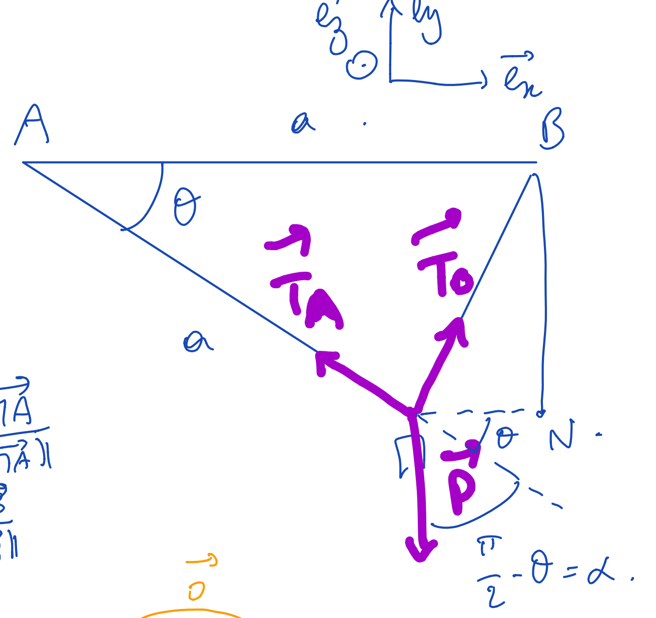
→ Signe du moment cinétique

2) Si on retire la masse m_3 : $\dfrac{d\mathcal{L}_\Delta(\text{Tige})}{dt} = 0$

La barre est alors en rotation uniforme.

Version 2 :

1) Système : point matériel M (m)



BdF :

→ Poids : $\vec{P} = m\vec{g}$

→ Tension du fil à gauche : $\vec{T_A} = T_A \times \frac{\vec{MA}}{\|\vec{MA}\|}$

→ Tension du fil à droite : $\vec{T_B} = T_B \times \frac{\vec{MB}}{\|\vec{MB}\|}$

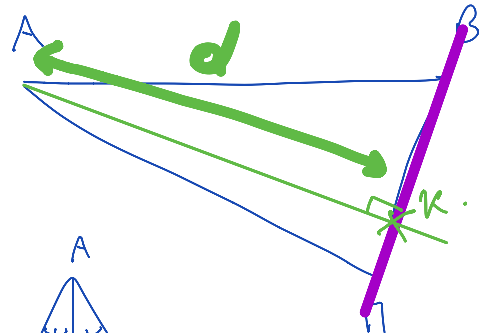
Moments :

→ $\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{P}) = \vec{AM} \wedge \vec{P} = a(\cos\theta\,\vec{e_x} - \sin\theta\,\vec{e_y}) \wedge (-mg\vec{e_y}) = a\cos\theta \times (-mg)\vec{e_x}\wedge\vec{e_y}$

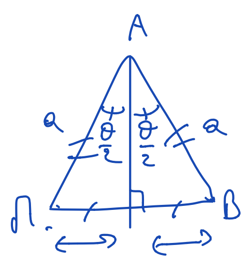
$$\boxed{\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{P}) = -mga\cos\theta\,\vec{e_z}}.$$

→ $\boxed{\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{T_A}) = \vec{0}}$.

→ $\vec{\mathcal{M}}_B(\vec{T_B}) = \vec{AM} \wedge T_B \frac{\vec{MB}}{\|\vec{MB}\|} = \frac{T_B}{\|\vec{MB}\|} \times \vec{AM} \wedge \vec{MB}$



$\|\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{T_B})\| = T_B \times AK$.



$AK = a\cos\frac{\theta}{2}$

$\|\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{T_B})\| = T_B\, a\cos\frac{\theta}{2}$ → sens direct donc $\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{T_B})\cdot\vec{e_z} > 0$.

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{T_B}) = T_B\, a\cos\frac{\theta}{2}\,\vec{e_z}}$$

2) On isole N :

→ Poids : $\vec{P_N} = m'\vec{g}$.

→ Tension : $\vec{T'_B} = T_B \dfrac{\vec{NB}}{\|\vec{NB}\|}$

Equilibre de N : $\vec{P_N} + \vec{T'_B} = \vec{0} \Rightarrow T_B = m'g$

Donc, $\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{T_B}) = m'g\, a\cos\frac{\theta}{2}\,\vec{e_z}$

→ Position d'équilibre de Π :

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}_A(\Pi)}{dt} = \vec{0} = \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{T_B}) + \underbrace{\cancel{\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{T_A})}}_{\vec{0}}$$

Donc, $-mga\cos\theta\,\vec{e_z} + m'ga\cos\frac{\theta}{2}\,\vec{e_z} = \vec{0} \Rightarrow \| m\cos\theta = m'\cos\frac{\theta}{2}$ (1)

$$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = \cos^2\frac{\theta}{2} - \left(1-\cos^2\frac{\theta}{2}\right) = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1.$$

Donc, (1) donne : $m\left(2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1\right) = m'\cos\frac{\theta}{2}$.

Soit, $2m\cos^2\frac{\theta}{2} - m'\cos\frac{\theta}{2} - m = 0$.

Posons $X = \cos\frac{\theta}{2}$. $\Rightarrow 2mX^2 - m'X - m = 0$.

$$\Delta = m'^2 - 4\times 2m(-m) = m'^2 + 8m^2$$

$$X_\pm = \frac{m' \pm \sqrt{m'^2 + 8m^2}}{4m}$$

Donc, s'il existe, θ_e vérifie : $\cos\frac{\theta_e}{2} = \dfrac{m' \pm \sqrt{m'^2+8m^2}}{4m}$

Or, $0 \le \theta_e \le \frac{\pi}{2}$ donc $\cos\frac{\theta_e}{2} \ge 0 \Rightarrow \boxed{\cos\frac{\theta_e}{2} = \frac{m' + \sqrt{m'^2+8m^2}}{4m}}$

Valide si et seulement si $\cos\frac{\theta_e}{2} \le 1$.

$$\frac{m'+\sqrt{m'^2+8m^2}}{4m} \le 1 \quad \text{soit} \quad m' + \sqrt{m'^2+8m^2} \le 4m$$

D'où, $\sqrt{m'^2+8m^2} \le 4m - m' \Rightarrow m'^2+8m^2 \le (4m-m')^2$.

Soit, $\cancel{m'^2} + 8m^2 \le 16m^2 - 8mm' + \cancel{m'^2}$ donc, $-8m^2 \le -8mm'$

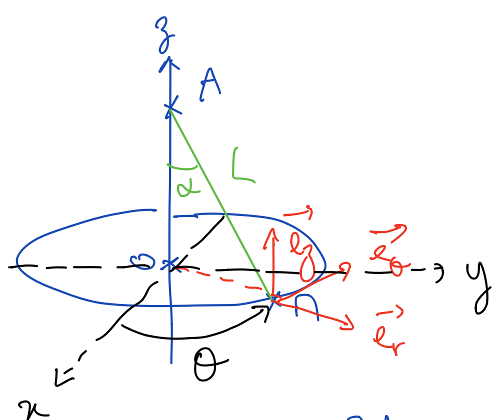
D'où, $8mm' \le 8m^2$ D'où, $\boxed{m' \le m}$.

Exercice 2

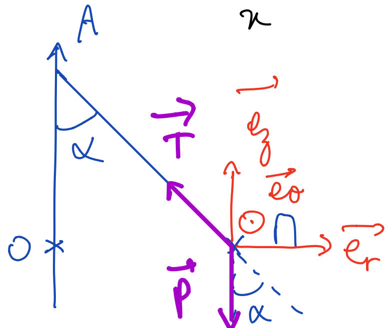
Système : Point matériel M.

Référentiel : laboratoire, terrestre considéré galiléen.

Repère : Cylindrique associé au point M par rapport au point O.



$$\vec{e_r} = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$$



BdF :

* Poids : $\vec{P} = -mg\vec{e_z}$
* Tension du fil : $\vec{T} = -T\frac{\vec{AM}}{\|\vec{AM}\|}$

Appliquer le TMC en point qui annule un moment.

RG, TMC en A :

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}_A(M)}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{T}) + \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{P}) \quad (1)$$

$*$ $\vec{\mathcal{L}}_A(M) = \vec{AM} \wedge \vec{p} = \vec{AM} \wedge m\vec{v} = m\, \vec{AM} \wedge \vec{v}$

$\rightarrow \vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e_\theta} = R\omega\vec{e_\theta}$

$\rightarrow \vec{AM} = (\sin\alpha\, \vec{e_r} - \cos\alpha\, \vec{e_z})\, L$

Donc, $\vec{\mathcal{L}}_A(M) = m\big(\sin\alpha\, \underbrace{\vec{e_r}\wedge\vec{e_\theta}}_{\vec{e_z}} - \cos\alpha\, \underbrace{\vec{e_z}\wedge\vec{e_\theta}}_{-\vec{e_r}}\big) R\omega L = mR\omega L(\cos\alpha\,\vec{e_r} + \sin\alpha\,\vec{e_z})$

$*$ $\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{T}) = \vec{0}$ car $\vec{AM}$ est colinéaire à $\vec{T}$. $-\vec{e_\theta}$

$*$ $\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{P}) = \vec{AM} \wedge \vec{P} = L(\sin\alpha\, \vec{e_r} - \cos\alpha\, \vec{e_z}) \wedge (-mg\,\vec{e_z}) = Lmg\sin\alpha\,\vec{e_\theta}$

$\vec{0}$

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}_A(M)}{dt} = \frac{d\, \overbrace{mR\omega L}^{cst} (\overbrace{\cos\alpha}^{cst}\, \vec{e_r} + \overbrace{\sin\alpha\,\vec{e_z}}^{cst})}{dt} = mR\omega L\cos\alpha\,\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$$

$$= mR\omega^2 L\cos\alpha\,\vec{e_\theta}$$

(1) devient :

$$mR\omega^2 L\cos\alpha\,\vec{e_\theta} = Lmg\sin\alpha\,\vec{e_\theta}.$$

Donc, $R\omega^2\cos\alpha = g\sin\alpha$

Or, $R = L\sin\alpha$ donc, $L\omega^2\cos\alpha\,\cancel{\sin\alpha} = g\cancel{\sin\alpha} \Rightarrow \boxed{\cos\alpha = \frac{g}{L\omega^2}}$

Exercice 5

1) $\Gamma_f = -\alpha\omega$

$\mathcal{P}(\Gamma_f) = \Gamma_f \omega = -\alpha\omega^2$ Frottement $\rightarrow$ Action résistante donc $\mathcal{P}(\Gamma_f) < 0$

Donc, $\alpha > 0$.

2) Système : rotor, solide de moment d'inertie J par rapport à son axe de rotation.
Ref : Lié au stator, ref terrestre supposé galiléen.

BdActions mécaniques :

→ Couple de frottement : $\Gamma_f = -\alpha\omega$.
→ Couple moteur : Γ_0

RG, TMC :

$$\frac{d\mathcal{L}_\Delta(\text{rotor})}{dt} = \frac{d\,J\omega}{dt} = \Gamma_f + \Gamma_0$$

D'où, $J\frac{d\omega}{dt} = \Gamma_0 - \alpha\omega \Rightarrow \boxed{J\dot{\omega} + \alpha\omega = \Gamma_0}$

On pose $\tau = \frac{J}{\alpha}$ $\dot{\omega} + \frac{\omega}{\tau} = \frac{\Gamma_0}{\alpha}$

→ Solution homogène : $\omega(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$
→ Solution générale : $\omega(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\Gamma_0}{\alpha}$
→ CI : $\omega(0) = 0 \Rightarrow A = -\frac{\Gamma_0}{\alpha}$

D'où, $\omega(t) = \frac{\Gamma_0}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ $\omega_f = \frac{\Gamma_0}{\alpha}$ $\omega(t) = \omega_f\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

3) Th de Fourier : Tout signal périodique se décompose en une somme de signaux sinusoïdaux.

La vitesse du rotor sera aussi harmonique après le transitoire → Temps carac :

$$\tau = \frac{J}{\alpha}.$$

4) L'équation différentielle devient :

$$J\frac{d\omega}{dt} + \alpha\omega = \Gamma_0 + \gamma\cos(\Omega t)$$

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{\alpha}{J}\omega = \frac{\Gamma_0}{J} + \frac{\gamma}{J}\cos(\Omega t)$$

Soit $\dot{\omega} + \frac{\omega}{\tau} = \frac{\omega_f}{\tau} + \frac{\gamma}{J}\cos(\Omega t)$

→ Solution homogène : Idem.

→ Solution constante : $\omega_{cst} = \omega_f$

→ Solution harmonique : ω_{harm}

Théorème de superposition.

$$\frac{d\omega_{harm}}{dt} + \frac{\omega_{harm}}{\tau} = \frac{\gamma}{J}\cos(\Omega t) \quad (*)$$

Utilisons la représentation complexe et posons $\omega_{harm} = A\cos(\Omega t + \varphi)$.

Ainsi, on peut poser $\underline{\omega}_{harm} = Ae^{j\varphi}e^{j\Omega t}$

L'équation $(*)$ donne ainsi :

$$j\Omega\underline{\omega}_{harm} + \underline{\omega}_{harm} \times \frac{1}{\tau} = \frac{\gamma}{J}e^{j\Omega t}$$

Ainsi, $j\Omega Ae^{j\varphi} + \frac{e^{j\varphi}A}{\tau} = \frac{\gamma}{J}$

D'où, $\underbrace{Ae^{j\varphi}}_{\underline{X}} = \frac{\gamma/J}{j\Omega + \frac{1}{\tau}} = \frac{\gamma\tau}{(1+j\Omega\tau)J}$

$$A = |Ae^{j\varphi}| = \frac{\gamma\tau}{J} \times \frac{1}{\sqrt{1+\Omega^2\tau^2}}$$

$$\left(\varphi = \arg(Ae^{j\varphi}) = -\arctan(\Omega\tau)\right)$$

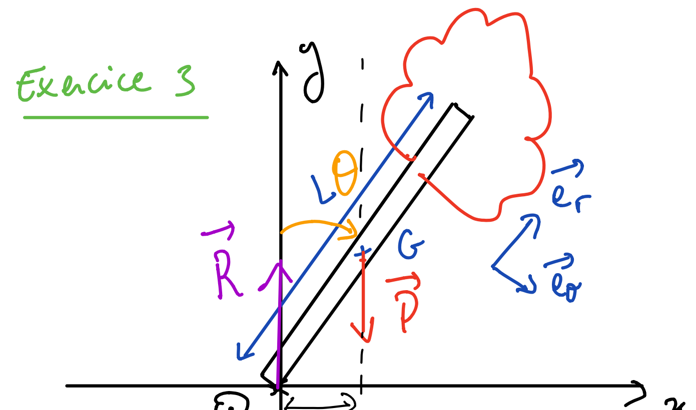
Donc, $\boxed{A = \frac{\gamma}{\alpha} \times \frac{1}{\sqrt{1+\Omega^2\tau^2}} = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \Omega^2 J^2}}}$

$$\boxed{\omega(t) = \omega_{0}t + A\cos(\Omega t + \varphi)}$$

5) a) Plus $J \nearrow$, plus $A \searrow$: Une grande inertie stabilise (robustesse face aux vibrations).

b) Plus $J \nearrow$, plus $\tau \nearrow$: Un système peu réactif (rapidité faible).

Exercice 3



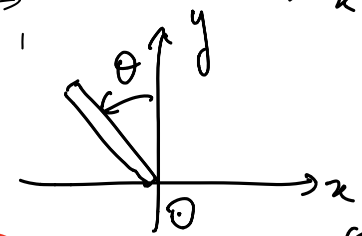
Système : Arbre de masse m

Repère : Cartésien (O, x, y).

Référentiel : Terrestre, supposé galiléen.

Bilan des forces :

- Poids $\vec{P}$ appliqué en G
- Réaction du sol $\vec{R}$ appliquée en O.



$J\ddot{\theta} = -mg\frac{L}{2}\sin\theta$.

$J\ddot{\theta} = mg\frac{L}{2}\sin\theta$

1) TMC $\qquad \mathcal{M}_{(O_3)}(\vec{P}) > 0$

Nous étudions la chute de l'arbre dans un référentiel galiléen, nous pouvons donc lui appliquer le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe (O_3) (axe de rotation) :

$$\frac{d\mathcal{L}_{(O_3)}^{(arbre)}}{dt} = \mathcal{M}_{(O_3)}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{(O_3)}(\vec{R}) \quad (1)$$

Calculons ces termes :

* $\mathcal{L}_{(O_3)}(\text{arbre}) = -J\dot{\theta} = J\omega \Rightarrow \frac{d\mathcal{L}_{(O_3)}}{dt} = -J\ddot{\theta}$

$* \ \mathcal{M}_{(O_3)}(\vec{P}) = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) \cdot \vec{u}_3 = (\vec{OG} \wedge \vec{P}) \cdot \vec{u}_3 = \left[\frac{L}{2}\vec{e}_r \wedge (-mg\,\vec{u}_y)\right] \cdot \vec{u}_3$

$\mathcal{M}_{(O_3)}(\vec{P}) = \left[\frac{L}{2}\left(\cos\theta\,\vec{u}_y + \sin\theta\,\vec{u}_x\right) \wedge \left(-mg\,\vec{u}_y\right)\right] \cdot \vec{u}_3$

$\mathcal{M}_{(O_3)}(\vec{P}) = -mg\frac{L}{2}\sin\theta\ \vec{u}_3 \cdot \vec{u}_3 = -mg\frac{L}{2}\sin\theta .$

$* \ \mathcal{M}_{(O_3)}(\vec{R}) = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{R}) \cdot \vec{u}_3 = (\vec{OO} \wedge \vec{R}) \cdot \vec{u}_3 = \vec{0} \cdot \vec{u}_3 = 0 .$

(1) devient :

$$\boxed{J\ddot{\theta} = mg\frac{L}{2}\sin\theta} \qquad (2)$$

2) Multiplions (2) par $\dot{\theta}$:

$$J\ddot{\theta}\dot{\theta} = mg\frac{L}{2}\sin\theta\,\dot{\theta}$$

Intégrons par rapport au temps :

$$\int_0^t J\ddot{\theta}\dot{\theta}\,dt = \int_0^t mg\frac{L}{2}\sin\theta\,\dot{\theta}\,dt \iff \int_0^t J\frac{d\frac{\dot{\theta}^2}{2}}{dt}\,dt = \int_0^t -mg\frac{L}{2}\frac{d\cos\theta}{dt}\,dt$$

D'où, $J\int_0^t d\frac{\dot{\theta}^2}{2} = -mg\frac{L}{2}\int_0^t d\cos\theta \iff J\left[\frac{\dot{\theta}^2}{2}\right]_{\dot{\theta}(0)}^{\dot{\theta}(t)} = -mg\frac{L}{2}\left[\cos\theta\right]_{\theta(0)}^{\theta(t)}$

$\dot{\theta}(0) = 0$

soit, $J\frac{\dot{\theta}^2(t)}{2} = -mg\frac{L}{2}(\cos\theta - \cos\theta_0)$

$$\boxed{\dot{\theta} = \sqrt{\frac{mgL}{J}(\cos\theta_0 - \cos\theta)}}$$

$\theta_0 < \theta$

$\cos\theta_0 > \cos\theta .$

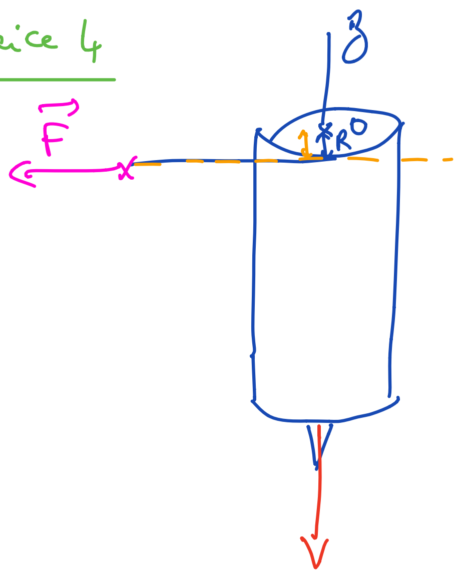
3) $$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{mgL}{J}\left(\cos\theta_0 - \cos\theta\right)}$$

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\frac{mgL}{J}\left(\cos\theta_0 - \cos\theta\right)}} = dt \rightarrow \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{mgL}{J}\left(\cos\theta_0 - \cos\theta\right)}} = \int_0^{t_c} dt$$

Donc, $$t_c = \sqrt{\frac{mL^2}{3mgL}} \times \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}} = \sqrt{\frac{L}{3g}} \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}}$$

$\boxed{L = 5\,m}$ AN : $t_c = \sqrt{\frac{5}{3\times 9{,}81}} \times 5{,}1 \simeq 2\,s$

Exercice 4



1) 1re méthode

Système : fil

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\vec{v}_{fil} = Fv = FR\omega > 0.$$

2e méthode : Système : toupie

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \mathcal{M}_{(O_3)}(\vec{F})\,\omega = \mathcal{M}_O(F)\cdot\vec{u}_z \times \omega.$$
$$= RF\omega > 0.$$

2) Référentiel galiléen → TEC :

$$\frac{d\,\mathcal{E}_c(\text{toupie})}{dt} = \underline{\mathcal{P}(\vec{F})} + \underbrace{\cancel{\mathcal{P}(\vec{P})}}_{0} + \underbrace{\cancel{\mathcal{P}(\vec{R})}}_{0}.$$

Or, $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} J\omega^2$

Donc, $$\frac{d\,\mathcal{E}_c}{dt} = \omega\dot{\omega}J$$

Ainsi, $\omega \dot{\omega} J = RF\omega \Rightarrow \boxed{\dot{\omega} = \frac{RF}{J} = \frac{RF}{\frac{mR^2}{2}} = \frac{2F}{mR}}$

3) $\omega(t) = \frac{2F}{mR} t + cste$ or $\omega(0) = 0$

Donc, $\omega(t) = \frac{2F}{mR} t$ Ainsi, $\theta(t) = \frac{2F}{mR}\frac{t^2}{2} + cste$ $\theta(0) = 0$.

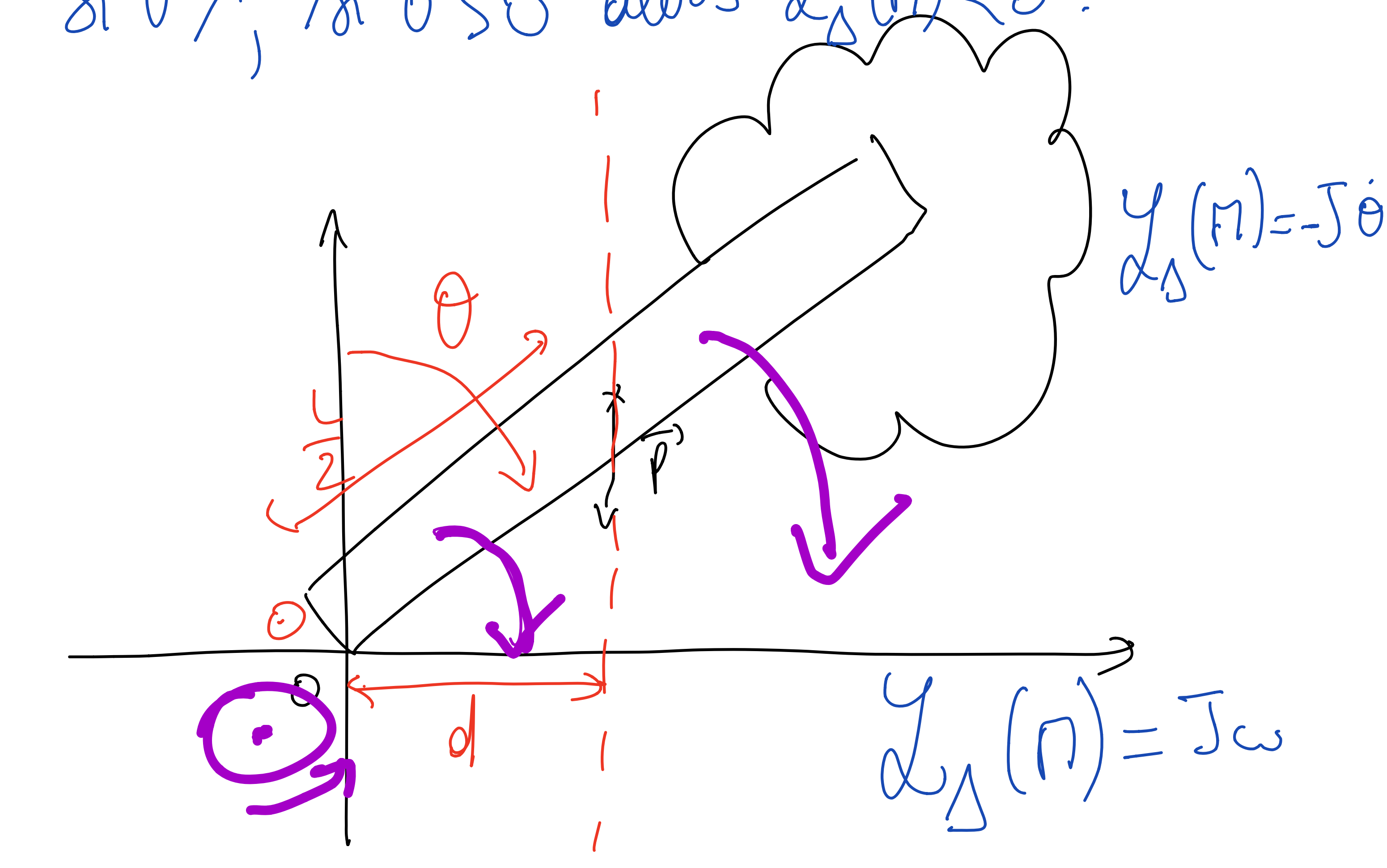
Donc, $\boxed{\theta(t) = \frac{F}{mR} t^2}$

Soit T l'instant au bout duquel la toupie a fait 4 tours :

$$\theta(T) = 4 \times 2\pi \Rightarrow \frac{F}{mR} T^2 = \theta(T) \Rightarrow T = \sqrt{\frac{\theta(T) \times mR}{F}}$$

Ainsi, $\boxed{\omega(\theta(T)) = \frac{2F}{mR}\sqrt{\frac{\theta(T)mR}{F}} = \sqrt{\frac{4F}{mR}\theta(T)} = \sqrt{\frac{32\pi F}{mR}}}$.

Si $\theta \nearrow$, si $\dot{\theta} > 0$ alors $\mathcal{L}_\Delta(\Gamma) < 0$.



$$\left|\mathcal{M}_{(O_3)}(\vec{P})\right| = d\,mg = \frac{L}{2}\sin\theta\, mg.$$

Donc, $\mathcal{M}_{(O_3)}(\vec{P}) < 0$.