GRAVITY

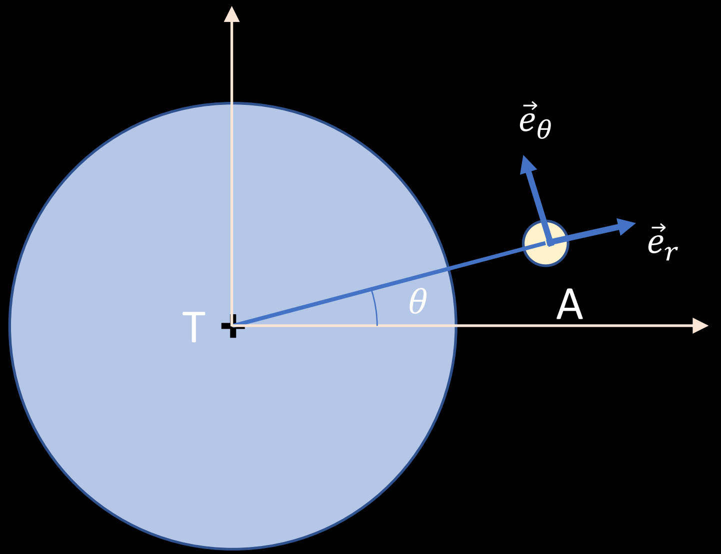
Exercice 2

Système : Astronaute $\boldsymbol{A}$ masse $\boldsymbol{m}$

Système : Astronaute $\boldsymbol{A}$ masse $\boldsymbol{m}$

Référentiel : Géocentrique (galiléen)

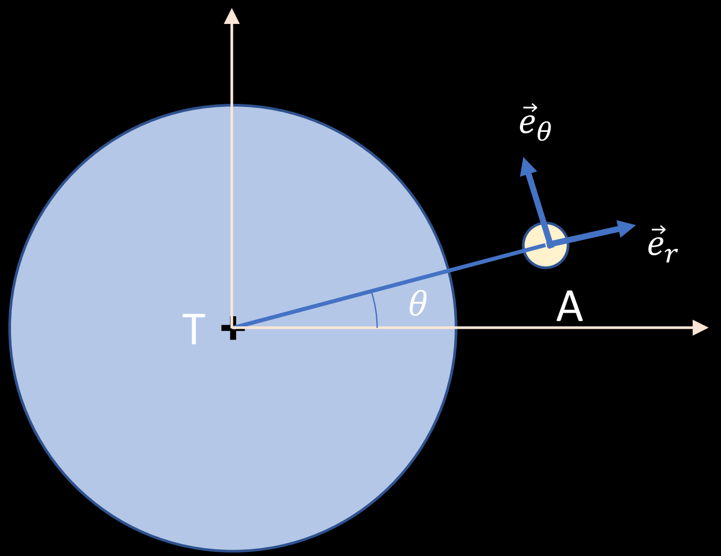
Repère : Polaire associé à $\boldsymbol{A}$ par rapport à $\boldsymbol{T}$



Système : Astronaute $\boldsymbol{A}$ masse $\boldsymbol{m}$

Référentiel : Géocentrique (galiléen)

Repère : Polaire associé à $\boldsymbol{A}$ par rapport à $\boldsymbol{T}$



Bilan des forces :

- Force d'attraction gravitationnelle par la Terre (point d'application $\boldsymbol{T}$)

1)

1) Notons R le rayon séparant l'astronome du centre de la Terre.

$$\vec{F}_{T/A} = -\frac{GM_0 m}{R^2}\,\overrightarrow{e_r}$$

Où $\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{TA}}{TA}$ avec T le point situé au centre de la Terre et A le point matériel modélisant l'astronaute.

1) Notons R le rayon séparant l'astronome du centre de la Terre.

$$\vec{F}_{T/A} = -\frac{GM_0m}{R^2}\,\overrightarrow{e_r}$$

Où $\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{TA}}{TA}$ avec T le point situé au centre de la Terre et A le point matériel modélisant l'astronaute.

On en déduit l'énergie potentielle suivante : $E_p = -\frac{GM_0m}{R}$

2) Appliquons le principe fondamental de la dynamique à $\boldsymbol{A}$:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{T/A}$$

2) Appliquons le principe fondamental de la dynamique à $\boldsymbol{A}$:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{T/A}$$

Or, le mouvement de Hubble est circulaire, celui de l'astronaute l'est donc également.

2) Appliquons le principe fondamental de la dynamique à $\boldsymbol{A}$:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{T/A}$$

Or, le mouvement de Hubble est circulaire, celui de l'astronaute l'est donc également. Or, la force étant centrale, on sait que la grandeur $\boldsymbol{C} = r^2\dot{\theta}$ est conservée. $\boldsymbol{r}$ est constant donc $\dot{\theta}$ l'est aussi -> le mouvement est uniforme.

2) Appliquons le principe fondamental de la dynamique à $\boldsymbol{A}$:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{T/A}$$

Or, le mouvement de Hubble est circulaire, celui de l'astronaute l'est donc également. Or, la force étant centrale, on sait que la grandeur $C = r^2\dot{\theta}$ est conservée. r est constant donc $\dot{\theta}$ l'est aussi -> le mouvement est uniforme.

Ainsi, l'accélération s'écrit : $\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_r$

2) Le principe fondamental de la dynamique devient alors :

$$-\frac{v^2}{R}\vec{e}_r = -\frac{GM_0}{R^2}\vec{e}_r$$

2) Le principe fondamental de la dynamique devient alors :

$$-\frac{v^2}{R}\vec{e}_r = -\frac{GM_0}{R^2}\vec{e}_r$$

Soit, en projetant sur $\vec{e}_r$:

$$\frac{v^2}{R} = \frac{GM_0}{R^2}$$

2) Le principe fondamental de la dynamique devient alors :

$$-\frac{v^2}{R}\vec{e}_r = -\frac{GM_0}{R^2}\vec{e}_r$$

Soit, en projetant sur $\vec{e}_r$:

$$\frac{v^2}{R} = \frac{GM_0}{R^2}$$

Or, $v = R\dot{\theta}$, donc :

$$R\left(R\dot{\theta}\right)^2 = GM_0$$

2) Or, on sait que $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ avec $\Omega = \dot{\theta}$ la pulsation du mouvement de l'astronaute autour de la Terre :

2) Or, on sait que $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ avec $\Omega = \dot{\theta}$ la pulsation du mouvement de l'astronaute autour de la Terre :

$$\frac{R^3 4\pi^2}{T^2} = GM_0$$

2) Or, on sait que $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ avec $\Omega = \dot{\theta}$ la pulsation du mouvement de l'astronaute autour de la Terre :

$$\frac{R^3 4\pi^2}{T^2} = GM_0$$

On en déduit ainsi la 3e loi de Képler :

$$\boxed{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_0}}$$

2) On sait que par définition, l'énergie mécanique est donnée par :

$$E_m = \mathrm{E_c} + \mathrm{E_p}$$

2) On sait que par définition, l'énergie mécanique est donnée par :

$$E_m = \mathrm{E_c} + \mathrm{E_p}$$

Avec les expressions de ces énergies ici :

$$E_m = \frac{1}{2} m \left(R\dot{\theta}\right)^2 - \frac{G M_0 m}{R}$$

2) On sait que par définition, l'énergie mécanique est donnée par :

$$E_m = \mathrm{E_c} + \mathrm{E_p}$$

Avec les expressions de ces énergies ici :

$$E_m = \frac{1}{2}m\left(R\dot{\theta}\right)^2 - \frac{GM_0m}{R}$$

Or, comme $\left(R\dot{\theta}\right)^2 = \frac{GM_0m}{R}$, on en déduit :

$$\boxed{E_m = -\frac{GM_0m}{2R}}$$

3) En utilisant la 3e loi de Képler, on trouve que :

$$\frac{T_s}{R_s} = \frac{4\pi^2}{GM_0} = \frac{T_H}{R_H}$$

Donc :

$$T_s = \frac{R_S T_H}{R_H}$$

3) En utilisant la 3e loi de Képler, on trouve que :

$$\frac{T_s^2}{R_s^3} = \frac{4\pi^2}{GM_0} = \frac{T_H^2}{R_H^3}$$

Donc :

$$T_s = T_H \sqrt{\frac{R_S^3}{R_H^3}}$$

En prenant $R_s = 6800$ km et $R_H = 7000$ km :

$$T_S = 93 \text{ min}$$

3) La vitesse est donnée par : $v = R\dot{\theta}$, soit :

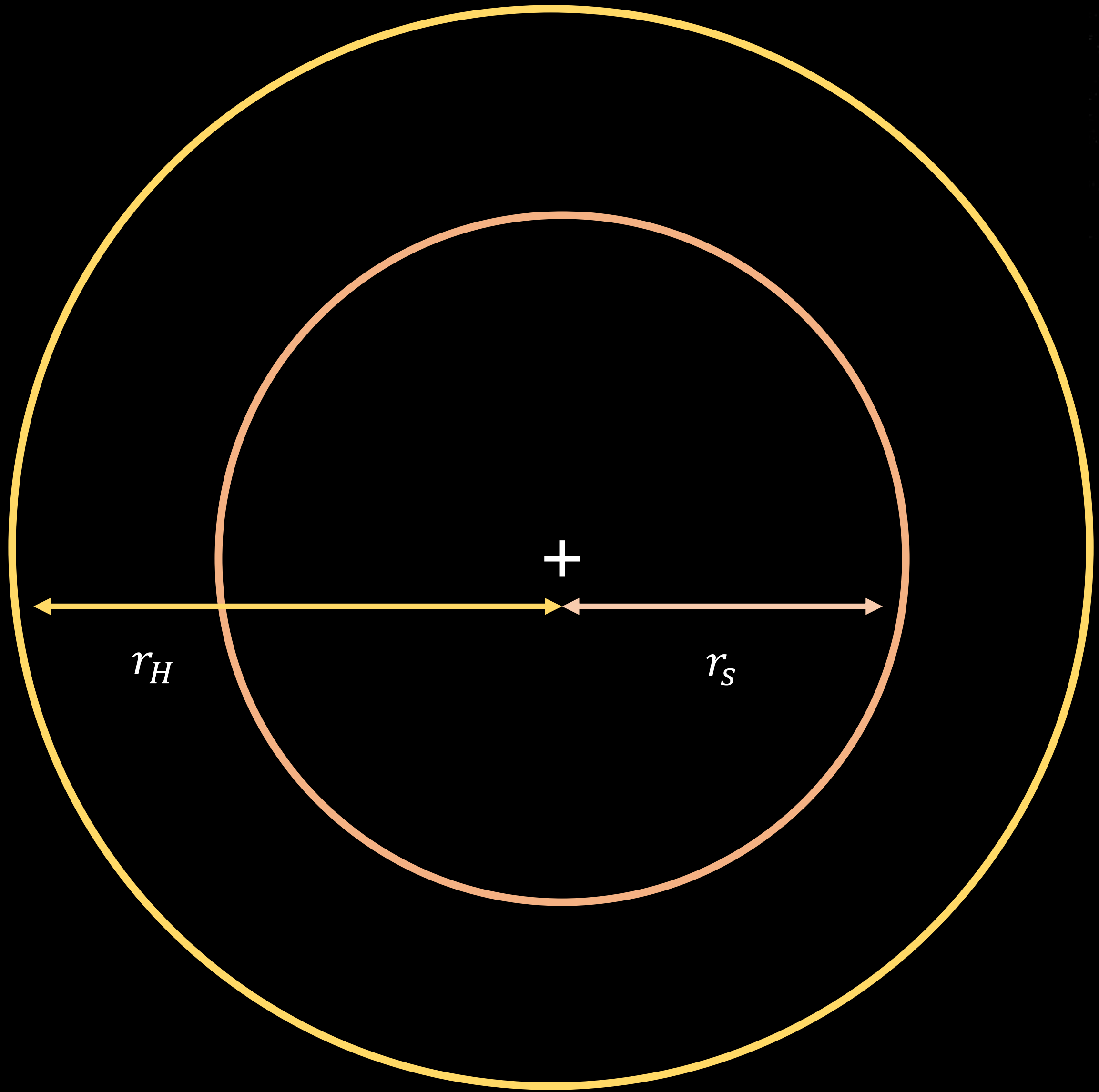
$$v_H = \frac{R_H 2\pi}{T_H} \text{ et } v_s = \frac{R_s 2\pi}{T_s}$$

L'application numérique donne :

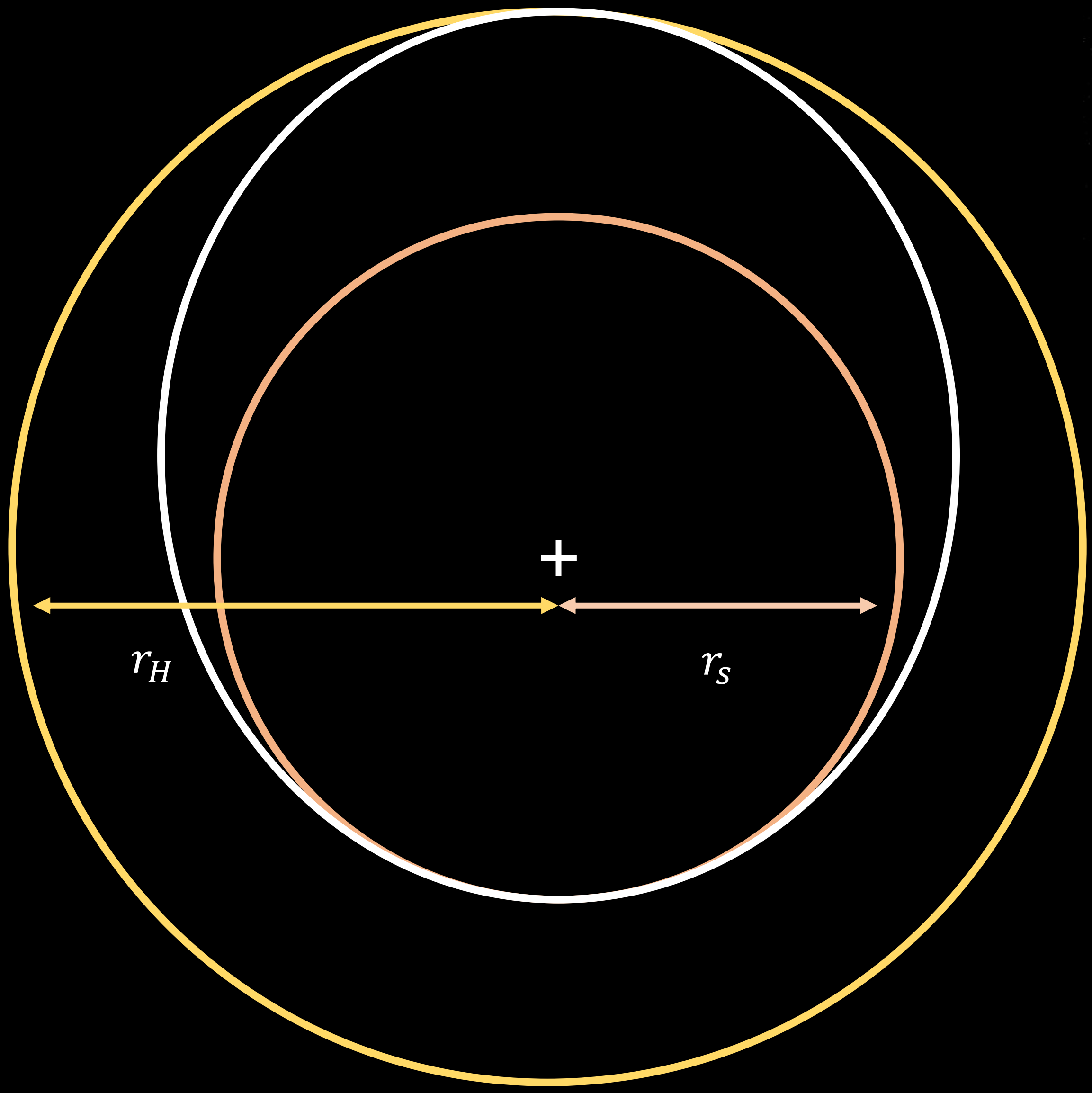
$$v_H = 7{,}56.10^3 \text{ m/s} \quad \text{et } v_s = 7{,}66.10^3 \text{ m/s}$$

4)

4)



4)



5) L'énergie mécanique se met sous la forme suivante dans le cas d'un système soumis à une force centrale comme l'astronaute :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{mC^2}{r^2} - \frac{GM_0m}{r}$$

5) L'énergie mécanique se met sous la forme suivante dans le cas d'un système soumis à une force centrale comme l'astronaute :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{mC^2}{r^2} - \frac{GM_0m}{r}$$

Plaçons-nous à l'apogée et au périgée. L'astronaute atteint des extréma pour r, donc $\dot{r} = 0$:

$$E_m = \frac{1}{2}\frac{mC^2}{r_H^2} - \frac{GM_0m}{r_H} = \frac{1}{2}\frac{mC^2}{r_S^2} - \frac{GM_0m}{r_S}$$

5) Multiplions par les rayons au carré :

$$\begin{cases} E_m r_H^2 = \dfrac{1}{2} m C^2 - G M_0 m r_H \\ E_m r_s^2 = \dfrac{1}{2} m C^2 - G M_0 m r_s \end{cases}$$

5) Multiplions par les rayons au carré :

$$\begin{cases} E_m r_H^2 = \dfrac{1}{2} mC^2 - GM_0 m r_H \\ E_m r_s^2 = \dfrac{1}{2} mC^2 - GM_0 m r_s \end{cases}$$

On obtient donc deux polynômes du second degré dont r_H et r_s sont les racines et on peut remarquer que :

$$r_H + r_s = -\frac{GM_0 m}{E_m}$$

5) On retrouve :

$$\boxed{E_m = -\frac{GM_0 m}{r_s + r_H}}$$

6) À l'apogée, on sait que l'énergie mécanique est donnée par :

$$E_m = \frac{1}{2} m v_H^2 - G M_0 m / r_H$$

6) À l'apogée, on sait que l'énergie mécanique est donnée par :

$$E_m = \frac{1}{2}mv_H^2 - GM_0m/r_H$$

Soit, d'après l'expression précédente :

$$-\frac{GM_0m}{r_s + r_H} = \frac{1}{2}mv_H^2 - GM_0m/r_H$$

6) D'où l'expression de la vitesse :

$$v_H = \sqrt{2GM_0 \frac{r_s}{(r_s + r_H) r_H}}$$

6) D'où l'expression de la vitesse :

$$v_H = \sqrt{2GM_0 \frac{r_s}{(r_s+r_H)r_H}}$$

Or, $GM_0 = \frac{4\pi^2 r_H^3}{T_H^2}$ d'où :

$$v_H = \sqrt{8\pi^2 \frac{r_s r_H^2}{(r_s+r_H)T_H^2}}$$

A.N. : $v_H = 7{,}5$ km/s

6) D'où l'expression de la vitesse :

$$v_H = \sqrt{2GM_0 \frac{r_s}{(r_s+r_H)r_H}}$$

Or, $GM_0 = \frac{4\pi^2 r_H^3}{T_H^2}$ d'où :

$$v_H = \sqrt{8\pi^2 \frac{r_s r_H^2}{(r_s+r_H)T_H^2}}$$

6) Par analogie :

$$v_s = \sqrt{8\pi^2 \frac{r_H r_s^2}{(r_s + r_H) T_S^2}}$$

AN : $v_s = 7{,}7$ km/s

7) Durée du voyage = durée pour parcourir la moitié de l'ellipse

$$\Delta t = \frac{T}{2}$$

7) Durée du voyage = durée pour parcourir la moitié de l'ellipse

$$\Delta t = \frac{T}{2}$$

Or, d'après la 3e loi de Képler :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_0}$$

7) Durée du voyage = durée pour parcourir la moitié de l'ellipse

$$\Delta t = \frac{T}{2}$$

Or, d'après la 3e loi de Képler :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_0}$$

Avec $a = \frac{r_s + r_H}{2}$ et $GM_0 = \frac{4\pi^2 r_H^3}{T_H^2}$

7) Avec $a = \frac{r_s + r_H}{2}$ et $GM_0 = \frac{4\pi^2 r_H^3}{T_H^2}$

$$T = \sqrt{\frac{\left(\frac{r_s + r_h}{2}\right)^3 T_H^2}{r_H^3}}$$

AN : $\Delta t = 47$ min