Point mathématique IX
Gradient d'une fonction

A Le gradient : un opérateur différentiel

DÉFINITION

Gradient : Soit f un champ scalaire du plan.
Le gradient est un opérateur différentiel dont l'expression en coordonnées cartésiennes est donnée par :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

Une définition plus large (et utile) est la suivante :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f . \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}f$$

où $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ est le vecteur déplacement élémentaire dans le système de coordonnées choisi pour l'étude.

Généralisation :

Dans les autres systèmes de coordonnées, on en déduit les expressions suivantes :

- En coordonnées cylindriques :
$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$
- En coordonnées sphériques :
$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$$

B Conséquences notables

- Un premier résultat qui peut être utile : la circulation du gradient entre A et B est donnée par l'état du système en A et en B :
$$\int_A^B \overrightarrow{\mathrm{grad}} f . \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \int_A^B \mathrm{d}f = f(B) - f(A)$$
- Si $\mathrm{d}f > 0$, c'est que $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f$ et $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ sont orientés dans le même sens : le gradient est orienté vers les zones où f augmente.
- Si $\mathrm{d}f = 0$, c'est que $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f$ et $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ sont orthogonaux : le gradient est perpendiculaire aux surfaces définies par $f = \text{cste}$.