Point mathématique VIII
Différentielle d'une fonction

A Dérivée partielle

Considérons une fonction f qui, aux coordonnées d'un point M associe une valeur réelle. Cette fonction est donc représentée par :

$$f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & f(x, y, z) \end{array}$$

Cette fonction est appelée un **champ scalaire**.

> **DÉFINITION**
> **Dérivée partielle :** Soit f un champ scalaire du plan.
> On définit la dérivée partielle de f par rapport à x comme la dérivée de la fonction $f(x, y, z)$ par rapport à x calculée comme si y et z étaient des constantes. On la note $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.
> On définit ainsi de même $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}$.

Exemples :

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par : $f : x \mapsto x^2y^3 + z$.

On calcule :

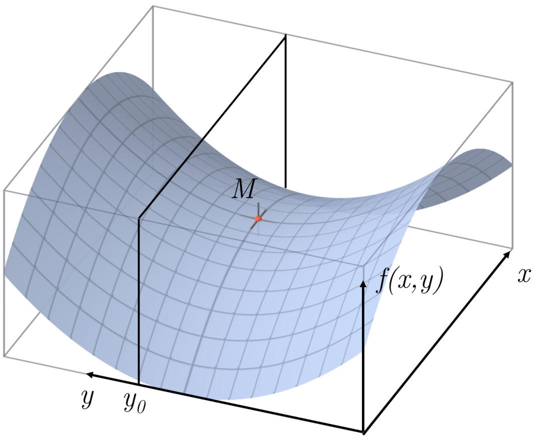
B Interprétation graphique

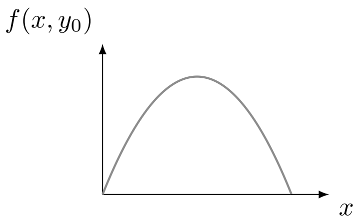
Considérons une fonction g à une variable dans $\mathbb{R}$. La représentation graphique de cette fonction est une **courbe** dans le plan.

Considérons une fonction f à deux variables dans $\mathbb{R}^2$. La représentation graphique de cette fonction est une **surface** dans l'espace.

En un point $M(x, y, f(x, y))$, la pente dépend de la direction prise.

Considérons un plan de coupe d'équation $y = y_0$. La courbe obtenue par intersection avec la surface ci-contre est donnée ci-dessous et représente l'évolution de la fonction $f(x, y_0)$.





La dérivée de la fonction définie par : $g : x \mapsto f(x, y_0)$ correspond à la dérivée partielle de f par rapport à x et prise en y_0. On a donc :

$$g'(x) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{y=y_0}$$

C Différentielle d'une fonction

> **DÉFINITION**
> **Différentielle d'une fonction :** Soit f un champ scalaire du plan.
> La **différentielle de** f est la variation élémentaire de f notée $\mathrm{d}f$ et associée à un déplacement élémentaire du point M. Pour l'exprimer, il faut se placer dans un système de coordonnées. Par exemple, si M est repéré par les coordonnées cartésiennes (x, y, z), on l'exprime alors :
> $$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$$

Remarque :

Cette définition fonctionne pour une fonction allant de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Prenons l'exemple d'une fonction dépendant du temps $f : t \mapsto f(t)$:

$$\mathrm{d}f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

Exemples :

On a déjà rencontré :

- $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$
- $\mathrm{d}t$
- $\mathrm{d}\mathscr{E}$

D Forme différentielle

Nous ne rentrerons pas ici dans le détail mathématique de l'objet que nous manipulerons mais certaines grandeurs infinitésimales ne peuvent être notées comme la variation d'une grandeur.

Exemples :

- Quantité de charges traversant une paroi pendant une durée $\mathrm{d}t$

- Travail élémentaire d'une force pendant une durée $\mathrm{d}t$