Point mathématique VI
Équations différentielles ordre 2

A Méthode de résolution

MÉTHODES DE RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

En mathématiques

Problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = f(x) \\ y(x_1) = y_1 \\ y'(x_2) = y'_2 \end{cases}$$

1/ Déterminer TOUTES les solutions de l'équation homogène $\rightsquigarrow y_h$

2/ Déterminer UNE solution particulière $\rightsquigarrow y_p$

3/ Déterminer TOUTES les solutions de l'équation différentielle $\rightsquigarrow y$

4/ Le problème de Cauchy admet UNE UNIQUE solution

En physique

Une équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 B$$

Deux conditions initiales :

$$s(t_1) = s_1$$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t_2) = \dot{s}_2$$

1/ Déterminer TOUTES les solutions de l'équation homogène $\rightsquigarrow s_h$

2/ Déterminer UNE solution particulière $\rightsquigarrow s_p$

3/ Déterminer TOUTES les solutions de l'équation différentielle $\rightsquigarrow s$

4/ Les conditions initiales nous permettent de trouver LA solution au problème physique

B Différentes solutions de l'équation homogène

On considère l'équation (E_0) suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s = 0$$

Soient $r \in \mathbb{C}$ et s une grandeur définie temporellement par $s(t) = e^{rt}$.
s est solution de E_0 si et seulement si :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$$

Cette équation est appelée équation caractéristique associée à (E_0). Son discriminant est donné par :

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2 \left[\frac{1}{4Q^2} - 1\right]$$

C Cas particulier : Équation différentielle harmonique

On appelle équation différentielle harmonique l'équation de la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 B$$