Point mathématique IV
Intégration et primitives

A Primitive d'une fonction

> ***Rappels de cours :***
> Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
> On appelle primitive de f sur I toute fonction F définie et dérivable sur I telle que $F' = f$.

On retiendra donc qu'il existe une **infinité** de primitives telles que leur différence est toujours constante.

Retenons ces quelques primitives usuelles qui nous seront utiles en Physique-Chimie :

Fonction	UNE primitive
$x \mapsto x^m$	$x \mapsto \frac{x^{m+1}}{m+1}$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln x$ 1
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x$

On sera souvent amenés à traiter des cas dans lesquels la primitive à calculer ne sera pas usuelle. Il faudra alors reconnaître la dérivée d'une fonction construite à l'aide d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de fonctions usuelles.

Exemples :

Déterminer les primitives des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$ (ω et φ étant des constantes) :

1/ $f(x) = \cos x \sin x$
2/ $g(x) = \cos^2 x$
3/ $h(t) = H_0 \cos(\omega t + \varphi)$
4/ $i(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$
5/ $j(t) = \tan(\omega t)$

B Intégrale d'une fonction continue

> ***Rappels de cours :***
> Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, on définit **l'intégrale de f sur** $[a, b]$, notée $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et qui est un réel mesurant l'aire algébrique de la surface située entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $y = b$.
>
> Rappelons deux propriétés importantes de l'intégrale :
>
> - **Linéarité de l'intégrale :** Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et λ et μ deux réels :
> $$\int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t)\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$
> - **Relation de Chasles :** Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Pour tout $c \in [a, b]$, on a :
> $$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$$

On peut calculer une intégrale à l'aide d'une primitive.
Soient f une fonction continue sur un intervalle i et $(a, b) \in I$, pour toute primitive F de f sur I, on peut écrire :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Exemples :

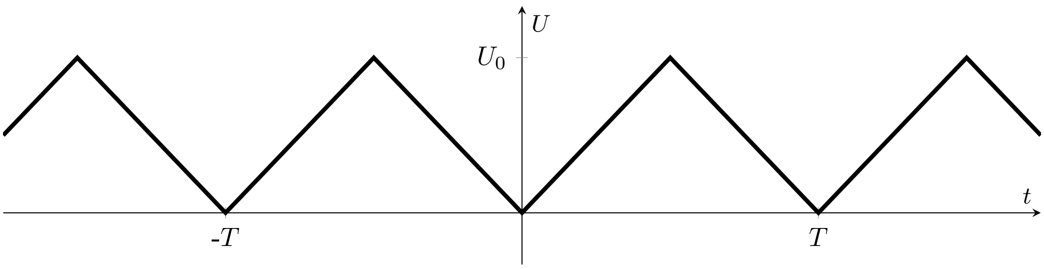
Calculer les intégrales suivantes (ω, T et φ étant des constantes) :

1/ $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T C\cos(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t$

2/ $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \cos^2(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t$

3/ $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \cos(\omega t+\varphi)\sin(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t$

4/ Calculer l'aire sous la courbe de la tension ci-dessous entre $-\frac{T}{2}$ et $\frac{T}{2}$:



5/ Calculer l'aire sous la courbe de la tension ci-dessous entre 0 et T :