Point mathématique III
Vecteurs et produit scalaire

A Composantes d'un vecteur

> ***Rappels de cours :***
> Dans une base orthonormée $(\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$, tout vecteur $\vec{V}$ peut s'écrire sous la forme :
>
> $$\vec{V} = V_x\vec{u}_x + V_y\vec{u}_y + V_z\vec{u}_z$$
>
> où V_x, V_y et V_z sont des scalaires appelés **composantes du vecteur** dans la base $(\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$.

On peut écrire également, de manière résumée :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

Mais cette écriture suppose de préciser **clairement** en amont la base utilisée.

On n'utilisera pas seulement la base cartésienne donnée ci-dessous comme nous l'avons vu au chapitre 5. Mais le principe d'écriture des composantes d'un vecteur dans une base orthonormée est toujours le même

B Produit scalaire de deux vecteurs

> ***Rappels de cours :***
> Le produit scalaire des vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{W}$ est un nombre noté $\vec{V}.\vec{W}$ et défini par :
>
> $$\vec{V}.\vec{W} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{pmatrix} = V_xW_x + V_yW_y + V_zW_z$$

Le produit scalaire est **symétrique** :

$$\vec{V}.\vec{W} = \vec{W}.\vec{V}$$

Le produit scalaire est **bilinéaire** :

$$\vec{V}.(\vec{W} + \lambda\vec{W}') = \vec{V}.\vec{W} + \lambda\vec{V}.\vec{W}'$$

C Carré scalaire et norme d'un vecteur

> ***Rappels de cours :***
> Le carré scalaire d'un vecteur $\vec{V}$ est donné par :
>
> $$\vec{V}^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$$
>
> On le note usuellement V^2.
>
> La norme d'un vecteur $\vec{V}$ est la racine carrée de ce carré scalaire :
>
> $$||\vec{V}|| = \sqrt{\vec{V}^2} = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

On peut déduire les carrés scalaires suivants de la bilinéarité du produit scalaire :

$(\vec{V} + \vec{W})^2 =$

$(\vec{V} - \vec{W})^2 =$

D Projection d'un vecteur

> ***Rappels de cours :***
> Les produits scalaires des vecteurs d'une base orthonormée sont les suivants :
>
> $$\vec{u}_x.\vec{u}_x = \vec{u}_y.\vec{u}_y = \vec{u}_z.\vec{u}_z = 1 \quad \text{et} \quad \vec{u}_x.\vec{u}_y = \vec{u}_y.\vec{u}_z = \vec{u}_z.\vec{u}_x = 0$$
>
> Ainsi, pour tout vecteur, on a :
>
> $$\vec{V}.\vec{u}_x = (V_x\vec{u}_x + V_y\vec{u}_y + V_z\vec{u}_z).\vec{u}_x = V_x\vec{u}_x.\vec{u}_x + V_y\vec{u}_y.\vec{u}_x + V_z\vec{u}_z.\vec{u}_x = V_x$$
>
> Plus généralement, on peut noter que toute composante de vecteur selon $\vec{u}_\alpha$ est donnée par :
>
> $$\boxed{V_\alpha = \vec{V}.\vec{u}_\alpha}$$

Cette dernière relation est très utile pour déterminer les composantes de n'importe quel vecteur selon n'importe quel vecteur de n'importe quelle base.

E Considérations géométriques

> ***Rappels de cours :***
> Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si $\vec{V}.\vec{W} = 0$.
>
> Plus généralement, le produit scalaire de deux vecteurs est donné par :
>
> $$\vec{V}.\vec{W} = ||\vec{V}|| \times ||\vec{W}|| \times \cos(\widehat{\vec{V},\vec{W}})$$
>
> Dans le cas où $\vec{W}$ est un vecteur de base, on obtient :
>
> $$\boxed{V_\alpha = ||\vec{V}|| \times \cos\theta}$$
>
> où θ est l'angle que fait $\vec{V}$ avec le vecteur en question.

On retrouve dans cette dernière expression les composantes telles qu'on peut les obtenir avec des relations de trigonométrie classiques.