Mouvements de particules chargées

TD 15

EXERCICES

Exercice 1 : Déflection électrique dans un tube cathodique

1/ La force de Lorentz électrique s'exprime simplement comme

$$\overrightarrow{F} = -e\overrightarrow{E} = \frac{eU}{d}\vec{u}_x$$

2/ Système : Électron de masse m et de charge $-e$ assimilé au point M Référentiel : terrestre, supposé galiléen Repère : cartésien. Comme ni le champ électrique, ni la vitesse initiale n'ont de composante selon $\vec{u}_y$, le mouvement de l'électron est alors limité au plan (xOz).
Bilan des forces : uniquement la force électrique de Lorentz.
Nous sommes dans un référentiel galiléen, nous pouvons donc appliquer le PFD à l'électron :

$$m\vec{a} = \overrightarrow{F}$$

Soit, en projetant :

$$\begin{array}{l} \text{selon } \vec{u}_x \\ \text{selon } \vec{u}_z \end{array} \left\{ \begin{array}{lcl} m\ddot{x} & = & \dfrac{eU}{d} \\ m\ddot{z} & = & 0 \end{array} \right.$$

Intégrons deux fois ces deux équations en sachant que l'électron est initialement en O et que $\vec{v}_0$ est porté par $\vec{u}_z$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & \dfrac{eU}{2md}t^2 \\ z(t) & = & v_0 t \end{array} \right.$$

Ce qui nous intéresse est la trajectoire, il faut donc exprimer t en fonction de z et le substituer dans l'expression de x :

$$\boxed{x(z) = \frac{eU}{2mdv_0^2}z^2}$$

3/ Comme les plaques ont pour longueur D, alors on a forcément :

$$\boxed{z_K = D \qquad \text{et} \qquad x_K = \frac{eU}{2mdv_0^2}D^2}$$

Le plus simple pour déterminer la vitesse en sortie est de déduire l'instant $t_K = z_K/v_0 = D/v_0$ où la particule passe par K de la loi horaire et de le substituer dans la loi de vitesse, ce qui donne :

$$\boxed{\dot{x}_K = \frac{eUD}{mdv_0} \qquad \text{et} \qquad \dot{z}_K = v_0}$$

4/ En considérant qu'une vitesse v_K suffisamment élevée permette de négliger l'action du poids de la particule, celle-ci n'est soumise à aucune force. Son mouvement est alors **rectiligne uniforme**.

5/ Le mouvement est désormais rectiligne uniforme. On a donc :

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_K = \frac{eUD}{mdv_0} \qquad \text{et} \qquad \dot{z}(t) = \dot{z}_K = v_0$$

Si on redéfinit l'instant $t = 0$ comme l'instant auquel l'électron atteint le point K, on peut intégrer ces deux équations différentielles en utilisant pour conditions initiales les positions x_K et z_K obtenues en question 3 :

$$z(0) = z_K = D \qquad \text{et} \qquad x(0) = x_K = \frac{eU}{2mdv_0^2}D^2$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{cases} x(t) &= \dfrac{eUD}{mdv_0}\left(t+\dfrac{D}{2v_0}\right) \\ z(t) &= v_0t+D \end{cases}$$

L'électron atteint l'écran à l'instant t^* tel que $z(t^*) = D + L$ soit $t^* = L/v_0$. On en déduit alors :

$$x_f = x(t^*) = \frac{eUD}{mdv_0}\left(\frac{L}{v_0}+\frac{D}{2v_0}\right) \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{X_P = \frac{eUD}{mdv_0^2}\left(L+\frac{D}{2}\right)}$$

Cyclotron

Système : Proton de masse m et de charge e assimilé à un point M
Référentiel : Lié au cyclotron, donc terrestre et on peut ainsi le considérer galiléen en bonne approximation.
Bilan des forces : Le proton n'est soumis qu'à la force de Lorentz qui diffère en fonction des zones :

- Force magnétique dans le dee :$\overrightarrow{F_{\text{mag}}} = e(\vec{v}\wedge\overrightarrow{B})$
- Force électrique entre les dees : $\overrightarrow{F_{\text{élec}}} = e\overrightarrow{E}$

1/ On ne cherchera pas à montrer que le mouvement est circulaire. On admet que comme le mouvement est plan et orthogonal à $\overrightarrow{B}$, il est circulaire d'après le cours.

En exprimant la puissance de la force de Lorentz, on obtient : $\mathcal{P}(\overrightarrow{F_{\text{mag}}}) = e(\vec{v}\wedge\overrightarrow{B}).\vec{v} = \vec{0}$ car on s'est placé à l'intérieur d'un dee.
Car le produit vectoriel de deux vecteurs est orthogonal à ces deux vecteurs.
La force de Lorentz magnétique ne fournit donc aucune puissance à la particule présente dans le « dee ».
La norme de la vitesse de la particule ne peut donc pas être modifiée par cette force : le mouvement est **uniforme**.

2/ La trajectoire d'un proton dans un champ magnétique est un arc de cercle, parcouru à vitesse constante. Utilisons un repérage polaire, centré sur le centre de l'arc de cercle. D'après le PFD appliqué au proton (on a le droit car on est dans un référentiel galiléen !) :

$$m\vec{a} = e(\vec{v}\wedge\overrightarrow{B})$$

On sait que la vitesse en polaire pour un mouvement circulaire est portée par $\vec{e}_\theta$ et l'accélération pour un mouvement circulaire uniforme est donnée par $\vec{a} = -\dfrac{v^2}{R}\vec{e}_r$, on en déduit donc :

$$m\left(-\frac{v^2}{R}\vec{e}_r\right) = evB(\vec{e}_\theta\wedge\vec{e}_z) = evB\vec{e}_r \qquad \text{en posant } \vec{v} = v\vec{e}_\theta$$

On cherche à isoler R, on projette donc sur $\vec{e}_r$:

$$m\frac{v^2}{R} = -evB \qquad \text{soit} \qquad \boxed{R = -\frac{mv}{eB}}$$

À noter qu'ici le rayon n'est pas négatif ! C'est seulement que $v < 0$, cela veut dire que le mouvement du proton se fait dans le sens horaire donc le sens opposé à celui de $\vec{e}_\theta$.

Un demi-tour dans le dee est un demi-cercle de périmètre πR, parcouru ainsi en une durée :

$$\Delta t_{\text{d}} = \frac{\pi R}{-v} = \frac{\pi m}{eB} \qquad \text{AN :} \qquad \Delta t_{\text{d}} = 3,3.10^2 \text{ ns avec } m = 1,7.10^{-27} \text{ kg}$$

Δt_{d} ne dépend pas de la vitesse du proton, on le voit bien dans son expression littérale. Cette durée ne dépend que des caractéristiques du proton m, e et de la norme du champ B.

Remarque : Dans ce calcul, on divise par $-v$ et non par $-v$ car pour utiliser la formule $v = \dfrac{d}{\Delta t}$ tous les termes doivent être positifs. Comme $v < 0$, il nous fallait donc utiliser $-v$.

3/ Pour que le proton soit accéléré de façon optimale à chaque passage entre les dees, il faut que la force électrique qu'il subit soit alternativement orientée selon $\vec{u}_x$ ($\vec{u}_x$ étant le vecteur unitaire horizontal orienté vers la droite) lorsqu'il passe du dee de gauche à celui de doirte et selon $-\vec{u}_x$ lorsqu'il passe du dee de droite à celui de gauche. En négligeant le temps de passage dans l'espace entre les dees ($a \ll \pi R$), il faut donc qu'une demi-période de la tension appliquée soit égale à Δt_{d}, soit pour la période :

$$T = 2\Delta t_{\mathrm{d}} = \frac{2\pi m}{eB} \qquad \text{et} \qquad \boxed{f = \frac{eB}{2\pi m} = 1,5 \text{ MHz}}$$

4/ On cherche l'augmentation d'énergie cinétique à chaque accélération, on va donc exprimer la variation d'énergie cinétique lors du passage du proton d'un dee à l'autre. Dans chaque dee, l'énergie cinétique du proton n'évoluant pas, on étudie donc sa variation entre deux situations où elle est constante. On va donc vouloir appliquer le théorème de l'énergie cinétique (on a le droit car le référentiel est galiléen) sous forme **intégrale** entre l'instant précédant l'accélération (A) et l'instant suivant l'accélération (B).

Entre ces deux instants, la force de Lorentz n'est que sous forme électrique :

$$\Delta E_c = W_{AB}(\overrightarrow{F}_{\text{élec}})$$

Exprimons la force électrique :

$$\overrightarrow{F}_{\text{élec}} = e\overrightarrow{E} = \pm e\frac{\Delta V}{a}\vec{u}_x \qquad \text{avec} \begin{cases} a \text{ la distance séparant les deux dees} \\ \Delta V \text{ la différence de potentiel entre les deux dees} \end{cases}$$

D'après l'énoncé, $\Delta V = U_m$ et le signe $\pm$ est associé à $\vec{u}_x$ et dépend du sens de déplacement de l'électron, il est toujours orienté dans le même sens que celui-ci.

Calculons le travail de cette force, celle-ci étant constante :

$$W_{AB}(\overrightarrow{F}_{\text{élec}}) = \overrightarrow{F}_{\text{élec}}.\overrightarrow{AB} = (\pm e\frac{\Delta V}{a}\vec{u}_x).(\pm a\vec{u}_x)$$

Or, on cherche à accélérer l'électron et d'après la question précédente, on oriente toujours le champ dans le sens de déplacement du proton, donc les signes $\pm$ prennent le même signe :

$$W_{AB}(\overrightarrow{F}_{\text{élec}}) = e\frac{U_m}{a}a = eU_m$$

(Ce travail est positif, on ne s'est donc pas trompés dans nos signes.)

Le théorème de l'énergie cinétique donne ainsi :

$$\boxed{\Delta E_c = eU_m}$$

L'application numérique en prenant $e = 1,6.10^{-19}$ C donne : $\boxed{\Delta E_c = 4.10^{-16} \text{ J} = 2,5.10^3 \text{ eV}}$

5/ On en déduit ainsi la valeur de la vitesse au début du (n+1)-ième demi-tour en fonction de celle au début du n-ième demi-tour :

$$\frac{1}{2}mv_{n+1}^2 - \frac{1}{2}mv_n^2 = eU_m \qquad \text{soit} \qquad v_{n+1} = \sqrt{v_n^2 + \frac{2eU_m}{m}}$$

On peut alors montrer par récurrence simple que :

$$v_n = \sqrt{\frac{2neU_m}{m}} \qquad \text{car } v_0 \text{ est considérée comme quasi-nulle}$$

Pour répondre à cette question, il faut donc trouver n tel que v_n soit égale à la valeur donnée dans l'énoncé :

$$n = \frac{mv_n^2}{2eU_m} \qquad \text{soit, en prenant pour } m = 1,7.10^{-27} \text{ kg, on obtient } n = 479 \text{ demi-tours}$$

Soit, en notant k le nombre de tours : $k = 240$ tours.

Remarque : On aurait également pu faire tout simplement le TEC entre le départ du proton et sa sortie du cyclotron :

$$\Delta E_c = neU_m$$

car le proton subit n accélérations successives pour passer d'une vitesse quasi-nulle à sa vitesse de sortie.

Depuis la question **2/**, on sait que le temps mis par le proton pour faire le demi-tour dans un dee ne dépend pas de la vitesse du proton. Il nous faut donc simplement multiplier le résultat qu'on vient d'obtenir à Δt_{d} :

$$\Delta t_{\text{accel}} = n\Delta t_{\text{d}} \qquad \text{AN : } \boxed{\Delta t_{\text{accel}} = 0,16 \text{ ms}}$$

6/ On sait que $R = \dfrac{m|v|}{eB}$ depuis la question **2/**.
L'application numérique donne alors :

$$\boxed{R_{\text{final}} = 1,6 \text{ m}}$$

Le rayonnement synchrotron

1/ Nous avons déjà fait deux fois cette démonstration dans cette fiche de TD donc je donne directement l'expression de la norme de la vitesse v :

$$v = \frac{|q|RB}{m}$$

Or, si la particule est non-relativiste, sa quantité de mouvement s'exprime $p = mv$, donc :

$$\boxed{p = |q|RB}$$

2/ D'après l'énoncé, $E = \gamma mc^2$ et d'après le document, dans l'anneau de stockage, $E = 6,0$ GeV, on en déduit donc la valeur de γ :

$$\gamma = \frac{6,0.10^9.1,6.10^{-19}}{9,1.10^{-31} \times (3.10^8)^2} = 1,2.10^4$$

γ est très grand, les électrons sont donc accélérés à une vitesse proche de la lumière ! On le voit car :

$$v = c\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \simeq c$$

3/ Comme on l'a montré en question **1/**, $\rho = \dfrac{p}{|q|B}$, ce qui devient ici :

$$\boxed{\rho = \frac{\gamma mv}{|q|B}}$$

L'application numérique donne : $\rho = \dfrac{1,2.10^4 \times 9,1.10^{-31} \times 3.10^8}{1,6.10^{-19} \times 0,80} = 25$ m
Or, on sait également que le rayon est donné par $L = \alpha\rho$ (avec l'angle en radians bien sûr), donc :

$$\boxed{\rho = \frac{2,45}{0,09817} = 25 \text{ m}}$$

Ces deux résultats sont donc cohérents.

4/ L'application numérique donne : $E_0 = 4,6.10^3$ keV. Cela correspond bien à la valeur donnée dans le document.

Si les cavités accélératrices n'existaient pas, l'électron perdrait justement de l'énergie sous forme de rayonnement et serait donc freiné, or, on veut qu'il garde une vitesse élevée, il faut donc continuer à l'accélérer.