Aspects énergétiques du mouvement d'un point matériel

TD 14

EXERCICES

Exercice 2 : Chute sur corde en escalade

L'énergie mécanique du grimpeur est donnée par

$$E_m = E_c + E_{p_p} + E_{p_e}$$

elle est constante car les seules forces travaillant sont des forces conservatives.

1/ La vitesse maximale atteinte par le grimpeur est la vitesse atteinte à la fin de la chute libre. En appliquant le théorème de l'énergie mécanique sous forme intégrale entre le début et la fin de la chute libre (entre les instants 1 et 2 de la figure) :

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{v = \sqrt{2gh}} \qquad \text{AN : } v = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

2/ Appliquons le théorème de l'énergie mécanique entre les instants 2 et 3 de la figure, sachant que le grimpeur est à l'arrêt à l'instant 3 :

$$\frac{1}{2}mv^2 + 0 + 0 = 0 - mg\Delta l + \frac{k}{2}\Delta l^2$$

En utilisant le résultat de la question précédente, on obtient : $mg(h + \Delta l) = \frac{k}{2}\Delta l^2$. L'approximation donnée dans la question donne :

$$mgh = \frac{k}{2}\Delta l^2 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\Delta l = \sqrt{2\frac{mgh}{k}}}$$

3/ La norme de la force de rappel du ressort maximale est donnée par $F_{\max} = k\Delta l$. D'après la réponse précédente, on en déduit :

$$F_{\max} = k\sqrt{2\frac{mgh}{k}} = \sqrt{2mghk} = \sqrt{2mgh\frac{\alpha}{L_0}} = \sqrt{2mg\alpha f}$$

L'application numérique donne ainsi :

$$F_{\max} = 10 \text{ kN} \quad \text{ce qui est inférieur à la limite de 12 kN}$$

4/ Pour la chute de 1 m, $f = 2$; pour la chute de 4 m, $f = 0,5$. Or, $F_{\max}$ dépend de $\sqrt{f}$, donc la chute de 1 m est plus dangereuse (même 2 fois plus dangereuse : rapport de 4).

Exercice 3 : Marsupilami

1/ Si on néglige les frottements, alors l'énergie mécanique du Marsupilami

$$E_m = E_{p_p} + E_{p_e} + E_c$$

est une constante du mouvement. Son énergie potentielle compte une contribution de pesanteur Ep_p et une contribution élastique Ep_e. Prenons la position du sol comme référence des énergies potentielles. Lorsqu'il est au sol, queue comprimée, prêt à sauter, l'énergie mécanique du Marsupilami est uniquement de type potentielle élastique,

$$E_m = 0 + \frac{1}{2}k(\ell_m - \ell_0)^2 + 0$$

Au contraire, lorsque le Marsupilami atteint sa hauteur de saut maximale, sa vitesse est nulle et son énergie mécanique n'est plus que de type potentielle de pesanteur,

$$E_m = mgh + 0 + 0$$

D'après la conservation de l'énergie mécanique,

$$\frac{1}{2}k(\ell_m - \ell_0)^2 = mgh \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{k = \frac{2mgh}{(\ell_m - \ell_0)^2} = 4,4.10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}}$$

2/ Lorsque la queue du Marsupilami quitte le sol, sa longueur est égale à sa longueur à vide. Le Marsupilami se trouve donc à une hauteur ℓ_0 au dessus du sol avec une vitesse v. Son énergie mécanique vaut alors

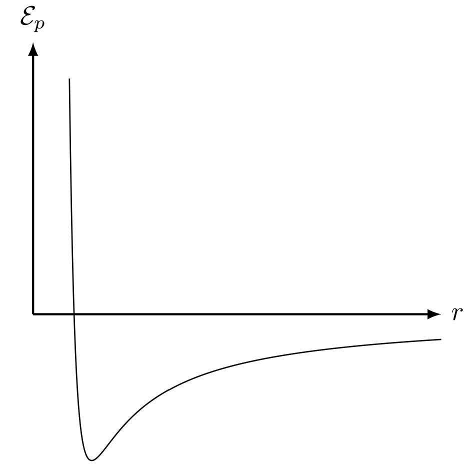
$$E_m = mg\ell_0 + 0 + \frac{1}{2}mv^2$$

D'après la conservation de l'énergie mécanique

$$mgh = mg\ell_0 + \frac{1}{2}mv^2 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v = \sqrt{2mg(h-\ell_0)} = 88 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

Exercice 4 : Molécule diatomique

1/ Le graphe associé à l'évolution de $\mathcal{E}_p$ en fonction de r est donnée ci-dessous :



Intéressons-nous au terme $-\frac{B}{r}$: pour que r augmente, il faut que l'énergie de l'atome d'hydrogène augmente. La distance entre l'atome de chlore et l'atome d'hydrogène a donc tendance à diminuer, c'est une interaction **attractive**.
Cette première interaction est associée à l'interaction de Van der Waals entre les deux atomes, elle est bien attractive.

Intéressons-nous au terme $\frac{A}{r^{12}}$: pour que r diminue, il faut que l'énergie de l'atome d'hydrogène augmente. La distance entre l'atome de chlore et l'atome d'hydrogène a donc tendance à augmenter, c'est une interaction **répulsive**.
Cette deuxième interaction est associée à l'impossibilité d'interpénétration des deux nuages électroniques des deux atomes, elle est bien répulsive.

2/ Pour trouver le minimum de cette énergie potentielle, il faut la dériver par rapport à r et l'annuler :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}r} = -12\frac{A}{r^{13}} + \frac{B}{r^2} \qquad \text{or} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}r}\right)_{r=r_0} = 0$$

Ainsi :

$$-12\frac{A}{r_0^{13}} + \frac{B}{r_0^2} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{r_0 = \sqrt[11]{\frac{12A}{B}}}$$

Pour vérifier qu'il s'agit bien d'une position d'équilibre stable, il faut dériver une deuxième fois :

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}r^2} = 12 \times 13\frac{A}{r^{14}} - 2\frac{B}{r^3} = \frac{1}{r^3}\left(156\frac{A}{r^{11}} - 2B\right)$$

En remplaçant r par r_0, on obtient :

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}r^2}\right)_{r=r_0} = \frac{1}{\left(\frac{12A}{B}\right)^{3/11}}\left(156\frac{A}{\frac{12A}{B}} - 2B\right) = \left(\frac{12A}{B}\right)^{-3/11}(13B-2B) = 11B\left(\frac{12A}{B}\right)^{-3/11} > 0$$

car B est une constante positive.

Donc r_0 est bien une position d'équilibre stable.

3/ L'énergie de dissociation de la molécule est donnée par :

$$\mathcal{E}_{\text{diss}} = \mathcal{E}_{\text{p}}(+\infty) - \mathcal{E}_{\text{p}}(r_0)$$

Il suffit donc de calculer :

$$\mathcal{E}_{\text{diss}} = 0 - \left(\frac{A}{r_0^{12}} - \frac{B}{r_0}\right) = \frac{1}{r_0}\left(B - \frac{A}{r_0^{11}}\right) = \left(\frac{12A}{B}\right)^{-1/11}\left(B - \frac{AB}{12A}\right)$$

D'où :

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{diss}} = \frac{11}{12}B\left(\frac{12A}{B}\right)^{-1/11}}$$

Exercice 5 : Traction ferroviaire

On utilisera une base cartésienne adaptée à la pente, l'axe (Ox) étant dirigé selon la direction du mouvement. Les forces exercées sur le train sont le poids $m\vec{g} = -mg\sin\alpha\vec{e}_x - mg\cos\alpha\vec{e}_y$, la force de réaction normale du support $\vec{N} = N\vec{e}_y$, la force tangentielle $\vec{T} = -T\vec{e}_x$ et la force de traction dont on ne connaît que la puissance $\mathcal{P}$.

1/ Seules les forces colinéaires à l'axe (Ox) ont une puissance non nulle puisque la vitesse du train est $\vec{v} = v\vec{e}_x$, il vient donc

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P} - (T + mg\sin\alpha)v}$$

Au démarrage, $v = 0$ donc $\left(\frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = \mathcal{P} > 0$, donc le train commence par accélérer. Ensuite, les forces résistantes $T + mg\sin\alpha$ diminuent cet effet jusqu'à atteindre éventuellement une situation de vitesse constante v_0 pour laquelle $\left(\frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t}\right)_{v=v_0} = 0$, on a donc :

$$v_0 = \frac{\mathcal{P}}{T + mg\sin\alpha}$$

2/ On peut écrire l'équation différentielle de la question précédente comme

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{R}{m}(v_0 - v)$$

On la mettra sous la forme $\frac{v}{v - v_0}\mathrm{d}v = -\frac{R}{m}\mathrm{d}t$. Pour intégrer cette équation, on remarque que :

$$\frac{v}{v - v_0} = 1 + \frac{v_0}{v - v_0}$$

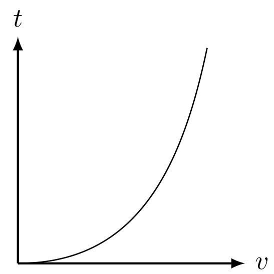
Ainsi, la solution de l'équation différentielle s'écrit :

$$v(t) + v_0\ln|v(t) - v_0| = -\frac{R}{m}t + C$$

C est une constante d'intégration qu'on détermine en écrivant $v(0) = 0$. Comme $v < v_0$, on obtient :

$$\boxed{v(t) + v_0\ln\left(1 - \frac{v}{v_0}\right) = -\frac{R}{m}t}$$

On ne peut isoler $v(t)$, en revanche, on peut tracer $t(v)$ puis lire la valeur de v pour un instant t quelconque. Au voisinage de $v = 0$, $\ln\left(1 - \frac{v}{v_0}\right) \simeq -\frac{v}{v_0} - \frac{v^2}{2v_0^2} + o(v^2)$, ainsi, pour des faibles vitesses, $v \simeq \sqrt{\frac{2v_0R}{m}t}$, la courbe démarre comme une racine carrée.


t
v