Mouvements dans un champ de force centrale conservative

TD 21

Questions de cours

- ⇝ Qu'est-ce qu'une force centrale ?
- ⇝ Montrer que le moment cinétique d'un point soumis à une force centrale se conserve. Quelles en sont les conséquences (mouvement plan et loi des aires à savoir expliquer et démontrer) ?
- ⇝ Comment construit-on l'énergie potentielle effective d'un point dans un champ de force conservative et centrale ?
- ⇝ Qu'est-ce qu'une force newtonnienne ? Citer des exemples.
- ⇝ Expliciter $E_{\text{p,eff}}$ dans le cas d'une force newtonnienne et tracer son allure. Quelles sont les trajectoires possibles pour une valeur de l'énergie mécanique donnée ?
- ⇝ Énoncer les lois de Kepler pour les planètes et les transposer au cas des satellites terrestres.
- ⇝ Planète en orbite circulaire : montrer que le mouvement est uniforme et calculer sa période.
- ⇝ Établir l'expression de l'énergie mécanique d'une planète ou d'un satellite en mouvement circulaire. Généraliser cette expression au cas d'un mouvement elliptique.
- ⇝ Établir la troisième loi de Kepler dans le cas particulier de la trajectoire circulaire.
- ⇝ Définir un satellite géostationnaire et calculer son altitude, justifier sa localisation dans le plan équatorial.

Savoir-faire

Tous les SF du chapitre 20 sont indispensables pour ce chapitre → à reprendre absolument si ce n'est pas clair.

Savoir-faire 1 - Montrer que tout mouvement à force centrale est plan

On considère la Lune, satellite naturel de la Terre.
Montrer que la Lune a un mouvement plan.

Savoir-faire 2 - Établir la conservation de la constante des aires

Démontrer que l'aire parcourue par la Lune en 1 jour est une constante.
En donner l'expression.

Savoir-faire 3 - Établir l'expression de l'énergie potentielle effective

Exprimer l'énergie potentielle effective de la Lune, en orbite autour de la Terre. Quel est nécessairement son signe et celui de l'énergie mécanique de la Lune ?

Exercices

Exercice 1 : Déterminer les vitesses cosmiques

On souhaite envoyer un satellite en orbite basse autour de la Terre.

1/ Déterminer la vitesse minimale à communiquer au satellite pour qu'il se mette en orbite autour de la Terre. On cherche le minimum, on considérera donc la distance Terre-satellite de l'ordre du rayon de la Terre.

2/ Quelle vitesse les ingénieurs doivent-ils éviter de dépasser sous peine de perdre leur satellite aux confins du Système Solaire ?

Exercice 2 : Mouvement orbital de la Terre

On suppose que la Terre n'est soumise qu'à la seule attraction solaire et qu'elle décrit dans son mouvement une ellipse dont le Soleil est l'un des foyers. Quand la Terre est à son aphélie, sa distance au Soleil est $r_1 = 1,52.10^{11}$ m et sa vitesse orbitale $v_1 = 2,93.10^4$ m/s. Sachant qu'à son périhélie, la Terre se trouve à la distance $r_2 = 1,47.10^{11}$ m, trouver sa vitesse orbitale au périhélie.

Exercice 3 : Gravity

Dans le film Gravity, des astronautes effectuent une mission de maintenance sur le télescope spatial Hubble lorsque leur navette est détruite. Leur seul espoir semble être de rejoindre la Station spatiale internationale, l'ISS. Le but de cet exercice est de définir dans quelles conditions ce voyage spatial est possible.

On suppose que le télescope Hubble et l'ISS sont en orbite circulaire basse autour de la terre, respectivement à 600 km et 400 km au-dessus de la Terre, dans le même plan. Le rayon de la terre est $R_T = 6400$ km ; $\mathcal{G}$ est la constante universelle de gravitation.

1/ Exprimer la force de gravitation exercée par la Terre, de masse M_0, sur l'astronaute et son équipement, de masse m. Donner l'expression de l'énergie potentielle de gravitation.

2/ En exprimant le principe fondamental de la dynamique pour un système en rotation uniforme, établir la troisième loi de Kepler. Exprimer l'énergie de l'astronaute sur son orbite, en fonction de $\mathcal{G}$, m, M_0 et r, rayon de l'orbite.

3/ Déterminer numériquement la période T_S de l'ISS, sachant que la période du télescope vaut $T_H = 97$ min. En déduire numériquement la vitesse du télescope v_H, puis celle de la station spatiale v_S sur leur orbite respective.

Pour rejoindre la station spatiale, l'astronaute envisage une orbite de transfert elliptique, dont l'apogée de distance r_H par rapport au centre de la Terre est sur l'orbite du télescope, et le périgée de distance r_S par rapport au centre de la terre est sur l'orbite de l'ISS.

4/ Représenter la trajectoire suivie par l'astronaute.

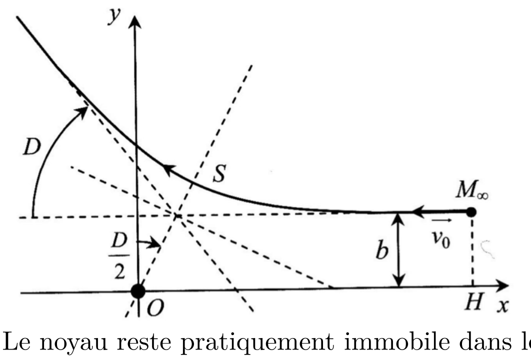
5/ Exprimer l'énergie de l'astronaute sur cette trajectoire en fonction de $\mathcal{G}$, M_0, m, r_H et r_S.

6/ Exprimer la vitesse de l'astronaute à l'apogée, en fonction de r_H, T_H et r_S. Par analogie, en déduire l'expression de la vitesse au périgée en fonction de r_S, T_S et r_H. Calculer les valeurs numériques.

7/ Quelle est la durée de ce voyage ?

Exercice 4 : Expérience de Rutherford

Entre 1909 et 1911, E. Rutherford et ses deux étudiants H. Geiger et E. Marsden ont réalisé et interprété une expérience consistant à bombarder une mince feuille d'or avec des particules α, dont Rutherford avait précédemment montré qu'il s'agit de noyaux d'hélium. Ils observèrent que la plupart de ces particules traversaient la feuille sans être affectées, mais que certaines étaient déviées, parfois très fortement. En reliant les angles de déviation aux dimensions microscopiques, cela permit la découverte du noyau atomique et l'estimation de sa taille.



Modélisons l'expérience en considérant une particule α de masse m et de charge $2e$, venant de l'infini avec la vitesse $-v_0\vec{e}x$ et s'approchant avec un paramètre d'impact b d'un unique noyau cible de numéro atomique Z. Le paramètre d'impact est la distance minimale entre le prolongement de la trajectoire rectiligne de la particule et le noyau situé en O.

Le noyau reste pratiquement immobile dans le référentiel terrestre : on travaille dans ce référentiel supposé galiléen, le repère étant situé sur la position O du noyau. La trajectoire suivie par la particule α est la branche d'hyperbole représentée ci-contre.

Données : $\varepsilon_0 = 8,9.10^{-12}$ F/m ; $e = 1,6.10^{-19}$ C ; $m = 6,6.10^{-27}$ kg et $Z_{Au} = 79$.

1/ Exprimer la force subie par la particule α sous la forme $\vec{F} = K/r^2\vec{e}_r$ et exprimer l'énergie potentielle d'interaction.

2/ Montrer que l'énergie mécanique E_m de la particule α est une constante du mouvement et donner sa valeur à partir des conditions initiales.

3/ Montrer que le moment cinétique $\vec{\mathcal{L}}_O$ de la particule en O est un vecteur constant et donner la valeur de cette constante à l'aide des conditions initiales. La particule étant repérée par ses coordonnées polaires dans le plan (Oxy), montrer que $\vec{\mathcal{L}}_O$ s'exprime de manière simple en fonction de r et $\dot{\theta}$.

4/ Montrer que l'énergie mécanique peut se mettre sous la forme $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_p^*(r)$, en explicitant la fonction $E_p^*(r)$. Comment l'appelle-ton ?

5/ On note S la position de la particule α pour laquelle elle passe au plus près du noyau d'or, et on note $r_{min} = OS$ la distance minimale d'approche. Simplifier l'expression de E_m lorsque $r = r_{min}$. En déduire

$$r_{min} = \frac{K}{mv_0^2}\left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{mbv_0^2}{K}\right)^2}\right)$$

6/ On peut montrer que l'angle de déviation D de la particule est donné par $\tan\frac{D}{2} = \frac{K}{mbv_0^2}$. Calculer b puis r_{min} pour $D_1 = 60°$ et $D_2 = 180°$ (particule renvoyée vers l'arrière). En déduire l'ordre de grandeur de la taille du noyau d'or.
On donne $v_0 \approx 3.10^7$ m.s^{-1}.

Devoir-Maison : Modèle Classique de Trou Noir

Cet exercice est un premier pas vers le travail du devoir surveillé. N'hésitez pas à rendre un travail incomplet pour que je vous fasse des retours sur vos productions.

En 1783, le physicien britannique John Michell eut pour la première fois l'idée de l'existence d'astres dont la gravitation serait si forte que même la lumière ne pourrait s'en échapper. L'idée fut reprise par Pierre-Simon [1] Laplace en 1796, puis oubliée car elle semblait trop abstraite. Elle ressurgit en 1916 dans le cadre de la relativité générale lorsque Karl Schwarzschild vit apparaître un tel objet dans les solutions des équations d'Einstein, que l'on peut voir comme l'analogue relativiste du principe fondamental de la dynamique. Ce concept fut développé par la suite, et la dénomination de trou noir s'est imposée dans les années 1960. On pense aujourd'hui en avoir détecté plus d'une centaine (la liste est sur Wikipédia), mais comme rien ne peut s'échapper d'un trou noir la détection ne peut être qu'indirecte.

Cet exercice propose de calculer l'ordre de grandeur de la taille et de la densité d'un trou noir dans un modèle heuristique de physique newtonienne. Considérons pour cela un point matériel M de masse m à proximité d'un astre sphérique de masse m_0, de rayon R et de centre O. Cet astre est supposé suffisamment massif pour que l'on puisse considérer que M n'est soumis qu'à la force gravitationnelle due à l'astre. On étudie le mouvement de M dans le référentiel $\mathscr{R}$ astrocentrique, que l'on suppose galiléen.

1/ Exprimer la force gravitationnelle ressentie par M ainsi que l'énergie potentielle dont elle dérive en la supposant nulle à l'infini. Exprimer l'énergie mécanique de M. Celle-ci se conserve-t-elle ?

2/ Montrer que le mouvement de M est nécessairement plan. M étant alors repéré par ses coordonnées polaires, montrer que $C = r^2\dot{\theta}$ est une constante du mouvement.

3/ Montrer que l'énergie mécanique peut se mettre sous la forme :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{\text{p,eff}}(r)$$

en introduisant l'énergie potentielle effective $E_{\text{p,eff}}(r)$ dont on précisera l'expression en fonction de r.

4/ Tracer l'allure de la courbe représentative de $E_{\text{p,eff}}(r)$. À l'aide d'un raisonnement graphique, déterminer pour quelles valeurs de E_m le point M peut échapper à l'attraction d'un astre, c'est-à-dire se trouver dans un état de diffusion.

5/ En déduire la vitesse de libération v_{lib} à la surface de cet astre.

6/ Dans la conception classique de Michell, un trou noir est un astre dont la vitesse de libération est supérieure à $c = 3{,}0.10^8$ m $\cdot$ s^{-1}. Calculer le rayon de Schwarzschild R_S de l'astre, c'est-à-dire le rayon minimal qu'il doit avoir pour être un trou noir.

7/ Calculer numériquement R_S pour le Soleil ($M_S = 2{,}0.10^{30}$ kg) et pour la Terre ($M_T = 6{,}0.10^{24}$ kg). En déduire la densité minimale d'un trou noir de cette masse.

8/ Quelles sont les deux contradictions internes à cette approche ?

Notons toutefois que, malgré les limites évoquées plus haut, le rayon de Schwarzschild donne un bon ordre de grandeur de la taille d'un trou noir.

1. Sacré prénom quand même... lol..