Moment cinétique d'un système matériel

TD 20

Questions de cours

- Définir le moment cinétique d'un point matériel M par rapport à un point et par rapport à un axe orienté Δ. Définir le moment cinétique d'un solide par rapport à un axe autour duquel il est en rotation.
- Quelle information peut-on déduire du signe du moment cinétique par rapport à un axe ?
- Définir le moment d'une force par rapport à un point et par rapport à un axe orienté Δ.
- Quelle information peut-on déduire du signe du moment d'une force par rapport à un axe ?
- Définir un couple et donner (et démontrer) la caractéristique de son moment.
- Comment calculer simplement le moment $\mathcal{M}_\Delta$ d'une force par rapport à l'axe orienté Δ avec le bras de levier ?
- Donner des situations où le moment d'une force est nul par rapport à un axe Δ.
- Énoncer le théorème du moment cinétique pour un point sous forme vectorielle et scalaire pour un point matériel.
- Énoncer le théorème du moment cinétique pour un solide.
- Donner l'expression de l'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe.

Savoir-faire

Tous les SF des chapitres 5, 7 et 14 sont indispensables pour ce chapitre → à reprendre absolument si ce n'est pas clair.

Savoir-faire 1 - Savoir calculer le moment cinétique d'un point

On considère un pendule simple. Calculer le moment cinétique du point M par rapport au point O et par rapport à l'axe de rotation du pendule.

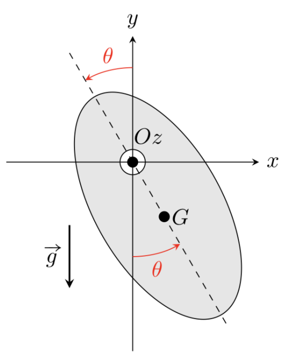
Savoir-faire 2 - Savoir calculer le moment d'une force

On considère toujours un pendule simple. Calculer le moment des forces s'exerçant sur M par rapport à O et par rapport à l'axe de rotation du pendule.

Savoir-faire 3 - Appliquer le théorème du moment cinétique

Déterminer l'équation du mouvement pour le pendule simple.

Savoir-faire 4 - Appliquer le TMC à un solide



On considère le pendule pesant schématisé ci-contre, en rotation autour de l'axe Oz fixe. On note J son moment d'inertie par rapport à Oz et on pose $d = OG$.

Déterminer l'équation du mouvement du pendule pesant.

Savoir-faire 5 - Raisonner avec les énergies

On considère le pendule pesant précédent. Retrouver l'équation du mouvement par une méthode énergétique.

Les Incontournables

Exercices classiques qui doivent être maîtrisés avant d'aller plus loin.

Exercice 1 : Équilibre

On considère une tige libre de tourner autour d'un axe Δ perpendiculaire à la tige.
Sur la tige sont posées 4 masses : $m_1 = 5m$ à une distance d de l'axe sur la droite, $m_2 = 3m$ à une distance $5d$ de l'axe sur la droite, $m_3 = m$ à une distance $2d$ de l'axe sur la gauche, $m_4 = 4m$ à une distance $5d$ de l'axe sur la gauche.

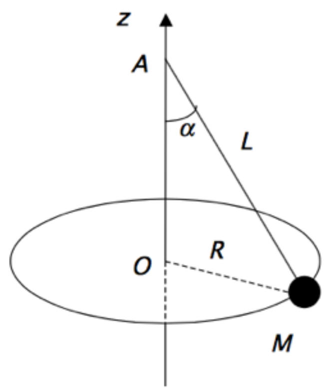
1/ Dans quel sens tourne la barre ?

2/ Que se passe-t-il si on retire la masse m_3 ?

Exercice 2 : Pendule conique

Un point matériel M de masse m est suspendu à un fil inextensible de longueur L attaché en un point A fixe d'un axe Oz.
Le point matériel est astreint à tourner autour de l'axe Oz dans un plan passant par O, à la vitesse angulaire constante ω dans le référentiel lié au laboratoire.
La direction du fil fait un angle α avec l'axe Oz. On utilisera la base polaire.

Appliquer la loi du moment cinétique et en déduire l'angle d'inclinaison α du pendule avec l'axe Oz en fonction de L, ω et du champ de pesanteur g.



Exercice 3 : Chute d'un arbre

On assimile un arbre à une tige homogène de longueur L et de masse m. On le scie à sa base et l'arbre bascule en tournant autour de son point d'appui au sol.
On suppose que le point d'appui O reste fixe et que l'arbre ne glisse pas. On néglige les frottements de l'air. On repère la position de l'arbre par l'angle θ qu'il fait avec la verticale.
Le moment d'inertie de l'arbre par rapport à son extrémité est $J = mL^2/3$.

1/ Etablir l'équation du mouvement de chute de l'arbre.

2/ En notant θ_0 l'angle initial, montrer que la vitesse angulaire de l'arbre s'écrit
$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{L}(\cos(\theta_0) - \cos(\theta))}$$

3/ Déterminer le temps de chute de l'arbre, sachant que $\theta_0 = 5°$ et $\displaystyle\int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} = 5,1$

Pour s'Entraîner

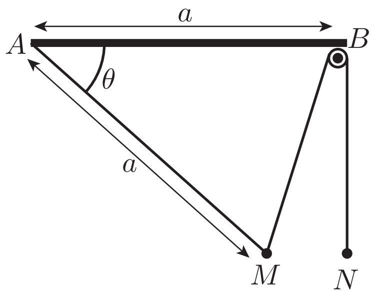
Ces exercices sont un peu plus étoffés et permettent d'approfondir la maîtrise des outils abordés jusqu'alors.

Exercice 4 : Équilibre, le retour

Le même que l'exercice 1 mais en plus compliqué...
Soit un fil inextensible et sans masse, fixé en A à un socle horizontal AB (de longueur a) et passant en B sur une poulie parfaite, de très petites dimensions. En un point M tel que $AM = a$ est fixée une masse ponctuelle m et, au bout du fil, est aussi accrochée une masse m' en N. Le dispositif est placé verticalement dans le champ de pesanteur $\vec{g}$.

1/ Établir le bilan des forces qui s'exercent sur la masse accrochée au point M et exprimer leurs moments en A (le seul angle devant intervenir dans ces expressions sera l'angle $\theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$).

2/ Trouver une condition sur m et m' pour qu'une position d'équilibre existe. Exprimer quand il existe l'angle d'équilibre θ_e en fonction de m et m'.



Exercice 5 : Toupie

Attention à la définition du système !
On modélise le lancer d'une toupie à l'aide d'un fil inextensible enroulé sur quatre tours sur le corps de la toupie. La toupie est modélisée par un cylindre de masse m et de rayon R, de moment d'inertie par rapport à son axe $mR^2/2$. Une pointe de moment d'inertie négligeable permet à la toupie de tenir sur le sol horizontal. On suppose que pendant tout son mouvement la toupie reste verticale et ne glisse pas sur le sol. Le fil est tiré avec une force de norme F constante pour lancer la toupie.
On notera ω la vitesse angulaire instantannée de la toupie, et on supposera qu'à l'instant initial où l'on commence à tirer sur le fil, la toupie est immobile.

1/ Exprimer la puissance instantanée de la force $\overrightarrow{F}$.

2/ Déduire du théorème de l'énergie cinétique l'accélération angulaire $\dot{\omega}$ de la toupie.

3/ Quelle est la vitesse angulaire de la toupie lorsque les quatre tours de fil ont été déroulés ?

Exercice 6 : Volant d'inertie

Un exercice pour travailler les couples
On s'intéresse dans cet exercice à la régulation de la vitesse de rotation d'une machine tournante par un volant d'inertie, qui est un anneau lié au rotor de masse élevée et d'assez grand rayon. La machine tournante en question peut aussi bien être un moulin à blé qu'un broyeur de cailloux, mais les volants d'inertie sont également utilisés en Formule 1 dans le KERS « Kinetic Energy Recovering System ». On modélise ici la machine tournante par un rotor de moment d'inertie J, soumis à un couple moteur Γ_0 constant et à un couple de frottement de type fluide $\Gamma_f = -\alpha\omega$ où α est une constante et ω la vitesse angulaire du rotor.

1/ Justifier par un argument énergétique que $\alpha > 0$.

2/ Le rotor est initialement immobile. Donner l'évolution de sa vitesse angulaire $\omega(t)$, en introduisant la vitesse finale ω_f et un temps caractéristique τ.

3/ Des vibrations du dispositif se traduisent par un nouveau couple exercé sur le rotor, que l'on prendra harmonique $\Gamma_{\text{vib}}(t) = \gamma\cos(\Omega t)$. Pourquoi ne perd-on pas en généralité en considérant ce couple harmonique ? Après un régime transitoire, la vitesse angulaire du rotor est elle aussi harmonique de pulsation Ω. Donner le temps caractéristique de la durée du transitoire.

4/ Après la fin du transitoire, on cherche la vitesse angulaire de rotation ω sous la forme :

$$\omega(t) = \omega_f + A\cos(\Omega t + \varphi)$$

Déterminer l'amplitude A. L'équation différentielle étant linéaire, on pourra utiliser le théorème de superposition [1] et traiter la partie harmonique avec la notation complexe.

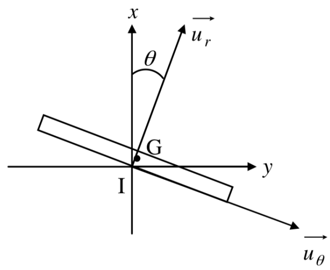
5/ En déduire l'intérêt et l'inconvénient d'un volant d'inertie.

Devoir-Maison : Loi de Murphy

Cet exercice est un premier pas vers le travail du devoir surveillé. Assurez-vous que vos réponses manifestent d'une maîtrise des compétences données ci-après.

1. Un système linéaire relève du principe de superposition : Une somme d'entrées quelconques correspondent à une somme de sorties identiques à celles qui existeraient si les entrées étaient injectées indépendamment les unes des autres dans le système.

On imagine une tartine beurrée homogène de dimensions : longueur $L = 2a$, largeur $l = 2b$, épaisseur $h = 2e$, posée sur une table. Sans faire attention, une personne la pousse vers un bord très lentement. Quand le milieu de la tartine atteint le bord I, la tartine amorce une rotation autour de l'arrête (Iz), sans glisser. L'action de la table sur la tartine est modélisée par une force $\overrightarrow{R} = T\overrightarrow{u_\theta} + N\overrightarrow{u_r}$ appliquée en I. On note θ l'angle entre la verticale et la tartine. On donne le moment d'inertie de la tartine selon (Iz) : $J_{Iz} = \frac{1}{3}m(a^2 + h^2)$.



1/ Déterminer $\dot{\theta}$ en fonction de θ. Déterminer également $\ddot{\theta}$ en fonction de θ.

2/ Déterminer T et N en fonction de θ.

On s'intéresse maintenant à la chute de la tartine. À partir de $\theta_0 = \pi/4$, la tartine quitte la table et se retrouve en chute libre.

3/ Déterminer $\dot{\theta}$ au moment où la tartine quitte la table.

On admet que $\dot{\theta}$ est constant au cours de la chute.

4/ Déterminer l'équation du mouvement de G en fonction du temps. En déduire le temps de chute si la hauteur de la table est h_T.

5/ De quel angle la tartine a-t-elle tourné lorsqu'elle heurte le sol ?