Aspects énergétiques du mouvement d'un point matériel

TD 14

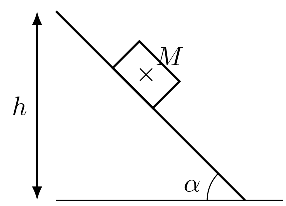
Questions de cours

- ⇝ Définir la puissance $\mathscr{P}$ d'une force. Préciser son unité.
- ⇝ Qu'appelle-t-on force motrice ? résistante ?
- ⇝ Définir le travail élémentaire d'une force.
- ⇝ Quelle est la relation entre travail élémentaire et puissance ?
- ⇝ Définir le travail W_{AB} d'une force le long d'une courbe. Que devient cette expression si la force est constante ?
- ⇝ Définir l'énergie cinétique et énoncer (et démontrer) le théorème de l'énergie cinétique sous forme différentielle et/ou intégrale. Expliquer quelle formule est plus adaptée dans quel cas.
- ⇝ Définir une force conservative. Donner et démontrer l'expression de l'énergie potentielle associée au poids, à la force de gravitation, à la force électrostatique et à la force de rappel d'un ressort.
- ⇝ Rappeler la relation liant l'énergie potentielle et la force conservative associée.
- ⇝ Définir l'énergie mécanique et donner (et démontrer) le théorème de l'énergie mécanique sous les formes différentielle et intégrale.
- ⇝ Systèmes conservatifs à un degré de liberté
  - ▷ Qu'est-ce qu'un système (ou mouvement) conservatif ?
  - ▷ Définir une position d'équilibre, une position d'équilibre stable, une position d'équilibre instable. Expliquer comment, à partir d'un graphe $E_p = f(x)$, on identifie les positions d'équilibre et leur nature stable ou instable.
  - ▷ Expliquer comment à partir d'un graphe d'énergie potentielle on peut déduire le comportement qualitatif d'un point : trajectoire bornée ou non, mouvement périodique, positions de vitesse nulle.

Savoir-faire

Savoir-faire 1 - Savoir utiliser le théorème de l'énergie cinétique et choisir la bonne forme

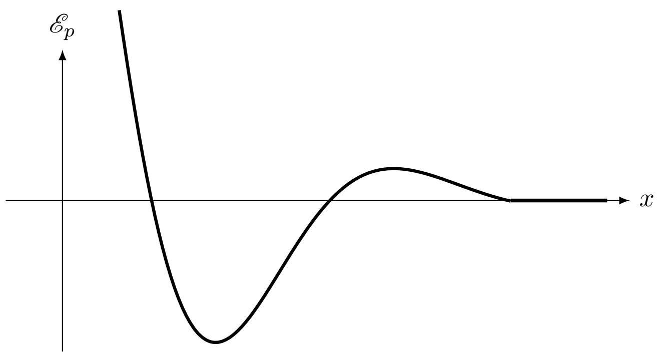
Un palet ($m = 1,0$ kg) est lâché sans vitesse initiale sur un plan incliné d'une hauteur $h = 5$ m et faisant un angle $\alpha = 45°$ avec l'horizontale. On néglige tout frottement entre le palet et le plan.
Quelle est la vitesse du palet au bas du toboggan ?
Déterminer l'équation du mouvement.



Savoir-faire 2 - Savoir utiliser le théorème de l'énergie mécanique et choisir la bonne forme

Reprendre l'exercice précédent, mais le résoudre en utilisant le théorème de l'énergie mécanique.

Savoir-faire 3 - Savoir exploiter un graphe d'énergie potentielle pour un mouvement à 1 degré de liberté



On considère un mouvement à un degré de liberté, noté x.

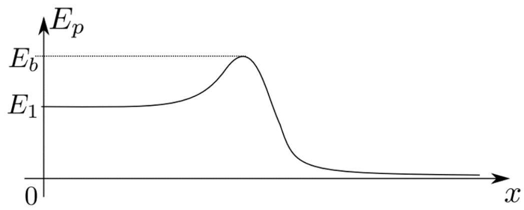
1/ Déterminer les positions d'équilibre et donner leur stabilité.

2/ Sous quelles conditions le point M sera-t-il dans un état lié ?

3/ Donner la direction de la résultante des forces et indiquer qualitativement les zones de forte et de faible intensité de la force.

Savoir-faire 4 - Franchissement d'une barrière de potentiel

On considère l'énergie potentielle ci-contre, qui peut correspondre à une bille glissant sans frottements sur un sol dont la topographie est celle du graphique : altitude h_1 en $x = 0$, franchissement d'un col d'altitude h_b, puis altitude nulle lorsque $x \to +\infty$. La bille est lancée en $x = 0$ avec une vitesse v_0 en direction des x croissants.



1/ Justifier que l'énergie mécanique de la bille reste constante au cours du temps.

2/ Montrer que la bille atteint tout juste le haut du col pour une valeur particulière de sa vitesse initiale v_0, que l'on exprimera en fonction de m, E_1 et E_b.

3/ Que se passe-t-il si v_0 est inférieure à cette valeur limite ? Et supérieure ?

4/ Exprimer enfin v_0 en fonction de m, g, h_1 et h_b.

Les Incontournables

Exercices classiques qui doivent être maîtrisés avant d'aller plus loin.

Exercice 1 : Looping

Une petite masse m peut glisser sans frottement sur différents tremplins.

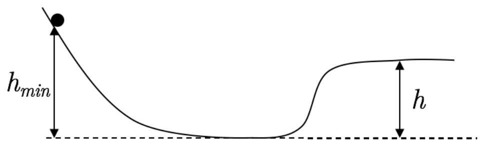


Figure 1

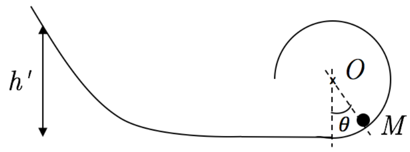


Figure 2

1/ Sur le tremplin de la figure 1, de quelle hauteur h_{min} doit-on lâcher la masse sans vitesse initiale afin qu'elle puisse remonter la pente de hauteur h ?

On considère maintenant le tremplin de la figure 2. La hauteur de l'endroit A où est lâchée la masse sans vitesse initiale est notée h'. On souhaite déterminer la hauteur h'_{min} pour que la masse fasse un tour complet (looping) sur la boucle (cercle de rayon R).

2/ Expliquer qualitativement pourquoi h'_{min} n'est pas égal à $2R$.

3/ Évaluer la vitesse v_0 atteinte au point le plus bas du looping (qu'on pourra noter B). En repérant par l'angle θ la position de la masse lorsqu'elle est dans la boucle, évaluer la norme $v(\theta)$ de la vitesse atteinte au point M en fonction de R, v_0, g et θ.

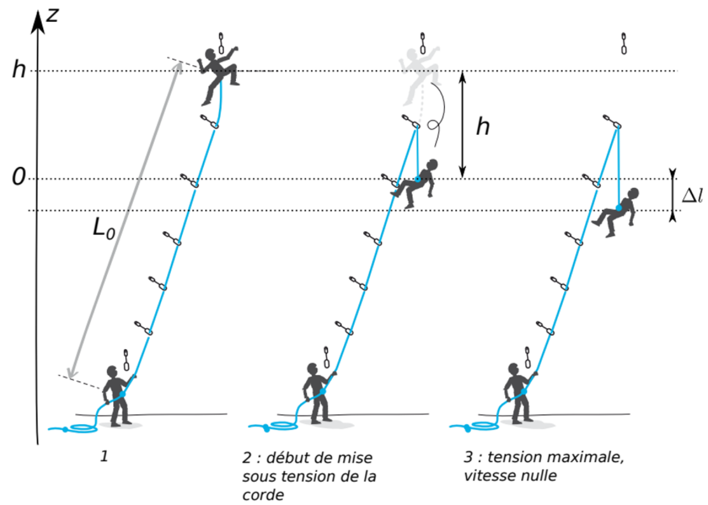
4/ Déterminer l'expression de $\overrightarrow{R_N}$ de la piste sur la masse en fonction de θ.

5/ En déduire la hauteur h'_{min} où la masse doit être libérée afin de faire un looping (c'est-à-dire qu'elle ne tombe pas au sommet du cercle).

Exercice 2 : Chute sur corde en escalade

On étudie un grimpeur qui effectue une chute.

Une corde d'escalade de longueur L_0 peut en première approximation être modélisée par un ressort de longueur à vide L_0 et de raideur $k = \dfrac{\alpha}{L_0}$, avec α une caractéristique de la corde.
Le grimpeur est en chute libre sur une hauteur h pendant laquelle la corde n'est pas sous tension. Puis la corde passe sous tension, et la chute se poursuit sur une hauteur Δl. La vitesse du grimpeur devient ainsi nulle au bout d'une hauteur totale de chute $h + \Delta l$.



On prendra $g = 10$ m $\cdot$ s^{-2}, une corde avec $\alpha = 5.0.10^4$ N et un grimpeur de masse 100 kg.

1/ À l'aide d'un bilan énergétique, donner l'expression de la vitesse maximale atteinte par le grimpeur. Faire l'application numérique pour une hauteur de chute $h = 5$ m.

2/ Toujours à l'aide d'une méthode énergétique, donner l'expression de l'allongement maximal Δl de la corde. On supposera que $\Delta l \ll h$ afin de simplifier le calcul.

3/ Donner enfin l'expression de la force maximale $F_{\max}$ qui s'exerce sur le grimpeur. On introduira le facteur de chute $f = h/L_0$.
Au delà d'une force de 12 kN, les dommages sur le corps humain deviennent importants. Que vaut $F_{\max}$ pour une chute de $h = 4$ m sur une corde de longueur $L_0 = 4$ m ? Conclusion ?

4/ Une chute d'un mètre arrêtée par une corde de 50 cm est-elle plus ou moins dangereuse qu'une chute de 4 m arrêtée par une corde de 8 m ?

Exercice 3 : Molécule diatomique

Le but de l'exercice est d'étudier le mouvement des deux atomes H et Cl l'un par rapport à l'autre dans la molécule H−Cl . L'atome de chlore étant beaucoup plus lourd que l'atome d'hydrogène, on pourra le considérer comme fixe dans le référentiel galiléen d'étude, et on étudiera le mouvement de l'atome d'hydrogène par rapport à lui. Le système sera donc : l'atome H.
De plus, nous n'étudierons que le mouvement à une dimension le long de l'axe (Ox) qui correspond à l'axe de la liaison H−Cl. On note r la distance entre les deux atomes et on néglige le poids.
De fait de la proximité de l'atome de chlore, H subit des forces dont la résultante est associée à l'énergie potentielle suivante :

$$\mathscr{E}_p(r) = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r}$$

où A et B sont des constantes réelles positives.

1/ Tracer l'allure de $\mathscr{E}_p(r)$. Quel terme correspond à une action attractive ? et quel terme correspond à une action répulsive de la part du chlore ? Comment peut-on interpréter ces deux actions qualitativement ?

2/ On constate qu'il existe une valeur r_0 de r correspondant à un minimum d'énergie potentielle. Exprimer r_0 en fonction de A et B. Vérifier par le calcul que $r = r_0$ est une position d'équilibre stable.

3/ Déterminer $\mathscr{E}_{diss}$, l'énergie de dissociation de la molécule, c'est-à-dire l'énergie qu'il faut fournir à l'atome H pour qu'il s'éloigne de Cl à l'infini.

Pour s'entraîner

Ces exercices sont un peu plus étoffés et permettent d'approfondir la maîtrise des outils abordés jusqu'alors.

Exercice 4 : Marsupilami

Le Marsupilami est un animal de BD créé par Franquin aux capacités physiques remarquables, en particulier grâce à sa queue qui possède une force importante. Pour se déplacer, le Marsupilami enroule sa queue comme un ressort entre lui et le sol et s'en sert pour se propulser vers le haut.
On note $\ell_0 = 2,0$ m la longueur à vide du ressort équivalent. Lorsqu'il est complètement comprimé, la longueur du ressort est $\ell_m = 50$ cm. La masse m de l'animal est 50 kg et la queue quitte le sol lorsque le ressort mesure ℓ_0.

1/ Quelle est la constante de raideur du ressort équivalent si la hauteur maximale d'un saut est $h = 10$ m ?

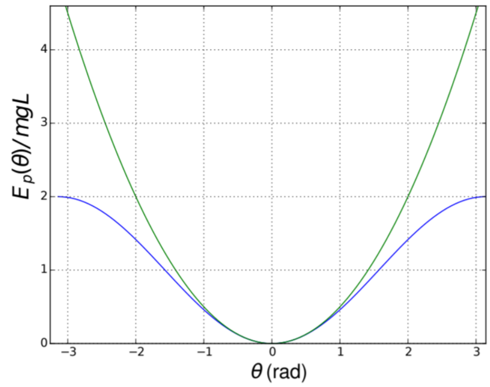
2/ Quelle est sa vitesse lorsque la queue quitte le sol ?

Exercice 5 : Puits de potentiel et approximation harmonique

On considère un pendule simple : masse m ponctuelle oscillant au bout d'une tige de masse négligeable, sans frottement. Soit Oz un axe vers le bas et θ l'angle orienté entre cet axe et la tige. Nous avons démontré qu'il s'agit d'un mouvement conservatif à un degré de liberté (θ), et que l'énergie potentielle du système s'écrit :

$$E_p(\theta) = mgL(1 - \cos\theta)$$

Cette énergie potentielle est tracée sur la figure ci-contre.



Graphe de l'énergie potentielle du système en fonction de θ, dans le cas sans approximation et dans le cas de l'approximation harmonique

a) Approximation harmonique

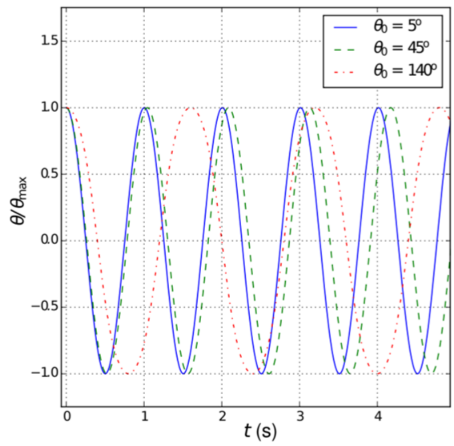
1/ On souhaite approcher la position d'équilibre stable en $\theta = 0$ par un puits de potentiel harmonique. Donner l'expression de l'énergie potentielle harmonique $E_{p,\text{harm}}$ qui permet de faire ceci.

2/ On effectue l'approximation des oscillations de faible amplitude. On lance le pendule d'un angle θ_0 sans vitesse initiale. Rappeler la solution $\theta(t)$ que l'on obtient. La période des oscillations dépend-elle de l'amplitude θ_0 ?

b) Sans approximation harmonique

On constate sans surprise sur la figure ci-dessus que l'énergie potentielle harmonique s'éloigne de l'énergie potentielle réelle lorsque θ n'est plus petit. Les solutions de l'équation du mouvement seront donc différentes de celles attendues dans l'approximation harmonique.

Afin d'obtenir les solutions, il est nécessaire de résoudre l'équation du mouvement $\ddot{\theta}+\omega_0^2 \sin\theta = 0$ sans faire d'approximation pour le sinus. Il faut alors recourir à une résolution numérique, par exemple la fonction `odeint-` sous Python. C'est ce qui a été fait sur la figure ci-contre.



Solution de l'équation du mouvement sans approximation harmonique, pour trois conditions initiales différentes. À gauche, graphe de $\theta(t)/\theta_0$.

3/ Que peut-on dire par rapport au cas de l'approximation harmonique ?

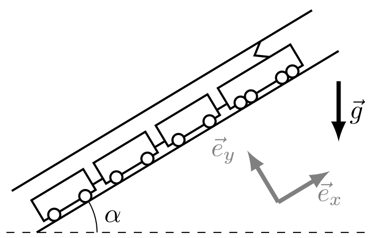
Pour Aller Plus Loin

Un exercice traitant d'un système non-conservatif. À ne chercher que si le reste est bien traité.

Exercice 6 : Traction ferroviaire

Un train, assimilé à un point matériel de masse m, monte une pente faisant l'angle α avec l'horizontale. La base cartésienne utilisée est représentée ci-dessous. On note $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur.

On suppose que l'effet de la locomotive est équivalent à un opérateur extérieur qui tire le train en fournissant une puissance constante $\mathcal{P}$ et que le contact entre les roues et le rail donne lieu à des frottements secs. On note $\overrightarrow{T}$ la composante tangentielle de la résultante des forces de réaction exercées par la voie sur le train.



1/ Exprimer le théorème de la puissance cinétique, sous forme d'une équation différentielle liant $v = \dot{x}$, m, g, T, $\mathcal{P}$ et l'angle α. Déterminer la vitesse limite v_0 du train.

2/ Le train démarre à l'instant initial à vitesse nulle. Exprimer la loi reliant la vitesse $v(t)$ à v_0, m et $R = T + mg\sin\alpha$. Tracer la courbe donnant $v(t)$.

Devoir-Maison : Balle Rebondissante

Cet exercice est un premier pas vers le travail du devoir surveillé. Assurez-vous que vos réponses manifestent d'une maîtrise des compétences données ci-après.

Dans cet exercice, on s'intéresse au mouvement d'une balle rebondissante de masse m lâchée sans vitesse initiale depuis une certaine hauteur initiale h_0.

On néglige tout frottement. On note $\vec{g}$ le champ de pesanteur uniforme.
On lâche la balle à $t = 0$, et on note t_0 l'instant du premier impact avec le sol, et v_0 la vitesse juste avant l'impact.

On choisit un axe z vertical, avec une orientation et une origine laissée au choix.

1/ En étudiant la première phase du mouvement, où la balle est en chute libre vers le sol, montrer que l'instant de l'impact est $t_0 = \sqrt{2h_0/g}$.

Une fois au sol, la balle rebondit. Le rebond n'étant pas parfaitement élastique, la balle perd une partie de son énergie cinétique. Notons E_{cn} l'énergie cinétique juste avant l'impact numéro n et E'_{cn} celle juste après cet impact. Ces deux énergies ne sont pas égales, car une partie de l'énergie est perdue lors du rebond. On a donc :

$$E'_{cn} = \alpha E_{cn} \quad \text{avec } \alpha < 1 \text{ le coefficient de restitution}$$

2/ Montrer par un raisonnement énergétique que pour le tout premier impact ($n = 0$), $E_{c0} = mgh_0$, puis que la hauteur maximale atteinte par la balle après ce premier rebond est $h_1 = \alpha h_0$.

3/ En déduire l'expression de la hauteur maximale h_n atteinte après l'impact numéro n en fonction de h_0 et de n.

On s'intéresse ensuite à la durée T_n qui s'écoule entre l'impact n et l'impact suivant. Il s'agit de la durée mise pour monter à la hauteur h_n et redescendre au sol, qui donc vaut deux fois la durée mise pour aller de h_n au sol.

4/ Montrer que $T_n = 2\alpha^{n/2}t_0$

On décide enfin d'exploiter une série de mesure de 10 rebonds, comme en TP.

5/ Que faut-il tracer en fonction de quoi afin d'en déduire le temps t_0 et le coefficient de restitution α en exploitant une régression linéaire ?
Comment en déduire une mesure de g ?