Lycée Dessaignes Blois

Thermodynamique

Durée 3h

Le sujet est constitué d'exercices totalement indépendants. N'hésitez pas à tous les aborder tout en faisant apparaître clairement sur votre copie le passage d'un exercice à l'autre. Bon courage !

L'usage de calculatrices est autorisé.

Conseils pour aborder le devoir

- ⋆ Lire le sujet en entier avant d'écrire quoi que ce soit
- ⋆ La rédaction (clarté, précision,...) et la présentation doivent être particulièrement soignées.
  Les hypothèses doivent être clairement données lorsqu'elles ne sont pas évidentes !
- ⋆ N'oubliez pas d'écrire un minimum français. Le correcteur a un seuil de tolérance qu'il s'agirait de ne pas dépasser...

Données :

- Rapport des capacités thermiques de l'air :
  $\gamma = 1,4$
- Constante des gaz parfaits :
  $R = 8,314\ \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$
- Masse molaire de l'air :
  $M_{\text{air}} = 29,0\ \mathrm{g/mol}$

Formulaire :

Entropie de n moles de gaz parfait, si C_v et C_p ne dépendent pas de T :

$$S(T, V) = C_v \ln T + nR \ln V + \text{cste}$$

$$S(P, V) = C_v \ln P + C_p \ln V + \text{cste}$$

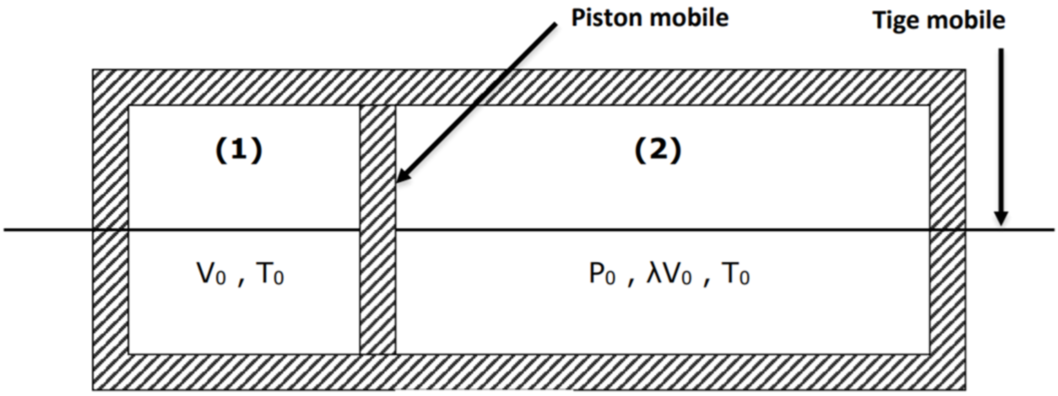
$$S(T, P) = C_p \ln T - nR \ln P + \text{cste}$$

Entropie d'une phase condensée si C ne dépend pas de T :

$$S(T) = C \ln T + \text{cste}$$

I - Transformations thermodynamiques d'un gaz parfait

On considère un cylindre indéformable d'axe horizontal fermé par deux fonds fixes et séparé en deux compartiments par un piston mobile étanche d'épaisseur nulle. Une action mécanique extérieure visant à modifier la position du piston est rendue possible par deux tiges de volume et de capacités thermiques négligeables, coaxiales au cylindre et traversant les fonds fixes en leur centre. Les parois du cylindre, des fonds et du piston sont calorifugées de telle manière qu'on puisse les considérer comme parfaitement adiabatiques. Les parois en contact avec l'intérieur du cylindre ont une capacité thermique négligeable et ne sont donc sujettes à aucun transfert thermique avec les gaz contenus dans les compartiments.



On appellera (1) le compartiment situé à gauche et (2) le compartiment situé à droite sur la figure ci-dessus.

Chacun de ces compartiments contient la même quantité de matière n d'un même gaz parfait. On admettra tout au long du problème que les variations éventuelles de température sont suffisamment faibles pour que les capacités thermiques molaires à pression et à volume constants C_{pm} et C_{vm} puissent être considérées comme indépendantes de la température de ce gaz parfait.

Initialement, le piston bloqué par un ergot à droite détermine un compartiment (1) de volume V_0 contenant le gaz à la température T_0 et un compartiment (2) de volume λV_0 ($\lambda \geq 1$) contenant le gaz sous la pression P_0 à la température T_0.

Pour les applications numériques, on prendra :

- Diamètre intérieur du cylindre : $d = 72,0$ mm
- Course maximale du piston entre les deux fonds fixes : $D = 1000$ mm
- $P_0 = 8,00$ bar $= 800$ kPa
- $T_0 = 20°\text{C} = 293,15$ K
- $\gamma = C_{pm}/C_{vm} = 1,40$
- $\lambda = 3,00$

A) Questions préliminaires

1/ Rappeler la relation de Mayer pour un gaz parfait qui relie les capacités thermiques molaires à volume et pression constants et la constante R.

2/ En déduire les expressions des différentes capacités thermiques molaires en fonction de n, γ et R.

B) Description de l'état initial des gaz

3/ Déterminer l'expression de la pression initiale P_1 dans le compartiment (1) en fonction de λ et P_0. Effectuer l'application numérique.

4/ Déterminer l'expression du volume V_0 du compartiment (1) en fonction de λ, d et D. Effectuer l'application numérique.

5/ Calculer la quantité de matière n de gaz parfait contenu dans chaque compartiment.

6/ En déduire les valeurs des capacités thermiques molaires C_{pm} et C_{vm}

C) Équilibrage des pressions par déblocage du piston

Les tiges étant parfaitement libres, on débloque le piston qui atteint une position d'équilibre telle que les pressions dans les deux compartiments respectivement P_1 et P_2 deviennent égales à $P^\star$ de part et d'autre de la paroi.

À l'équilibre de pression, le piston détermine un compartiment (1) de volume V_1 contenant le gaz sous la pression $P^\star$ à la température T_1 et un compartiment (2) de volume V_2 contenant le gaz sous la pression $P^\star$ à la température T_2.

7/ Dans quel sens se déplace le piston lorsque celui-ci est débloqué ? Justifier.

8/ Déterminer la variation d'énergie interne de l'ensemble des gaz contenus dans le cylindre entre l'état initial et l'état d'équilibre de pression défini ci-dessus.

9/ Donner l'expression en fonction des températures T_0, T_1, T_2, R, n et γ des variations d'énergie interne du gaz de (1) et du gaz de (2).

10/ Déduire des résultats précédents une relation entre T_0, T_1 et T_2.

11/ On veut déterminer une relation entre $P^\star$, P_0 et λ :

(a) Écrire l'équation d'état du gaz dans (1) et (2) à l'état initial et à l'état d'équilibre de pression.

(b) Donner la relation entre V_1, V_2 et V_0.

(c) Déduire des relations précédentes l'expression : $P^\star = \frac{2\lambda P_0}{1+\lambda}$. Faire l'application numérique.

12/ Un thermocouple de capacité thermique négligeable dont une soudure est placée dans le compartiment (1) et l'autre dans le compartiment (2) détermine entre ces deux compartiments une différence de température telle que : $T_2 - T_1 = 72{,}0$ K.
Déterminer les valeurs de T_1 et T_2.

13/ Rappeler la loi de Laplace et les hypothèses qui permettent de l'utiliser. Est-elle numériquement vérifiée pour le gaz du compartiment 1 ? Conclure.

14/ Déterminer numériquement le travail échangé par le gaz du compartiment (1) puis par celui du compartiment (2).

15/ Calculer l'entropie créée au cours de la transformation pour l'ensemble du système. Conclure.

II - Étude d'un moteur

On étudie dans ce problème le cycle thermodynamique d'une machine motrice ditherme qui fonctionne au contact de deux thermostats (sources de chaleur dont la température reste constante) dont les températures sont respectivement notées $T_f = 290$ K pour le thermostat le plus froid (noté Θ_f) et $T_c = 950$ K pour le thermostat le plus chaud (noté Θ_c). Le système que l'on considère au cours du cycle est une masse m de 1 kg d'air assimilable à un gaz parfait dont le rapport des capacités thermiques γ est constant.

On note W_c la quantité d'énergie échangée sous forme de travail avec le milieu extérieur par le système au cours du cycle. Q_f et Q_c sont respectivement les quantités d'énergie échangées sous forme de transfert thermique par le système avec Θ_f et Θ_c au cours d'un cycle.

A) Questions préliminaires

a) Généralités sur les moteurs

16/ Quels sont les signes de W_c, Q_f et Q_c dans la convention thermodynamique ?

17/ Définir le rendement η du moteur.

18/ À partir de l'écriture du premier et deuxième principe de la thermodynamique sur le cycle, montrer que l'efficacité maximale du moteur est obtenue pour un fonctionnement réversible.
Donner son expression.

b) Gaz parfait

19/ En vous appuyant sur la réponse à la question 2/, expliciter pour un kilogramme d'air la variation d'énergie interne entre deux états d'équilibre quelconques en fonction de R, M_{air}, γ et ΔT (la variation de température entre les deux états). Faire de même pour la variation d'enthalpie entre ces deux états.

B) Thermodynamique du moteur

La masse d'air subit dans le moteur la succession de transformations suivante :

- Une transformation d'un état d'équilibre noté A à un état d'équilibre noté B, qui fait passer la pression d'une valeur basse notée $p_0 = 10^5$ Pa à une valeur haute notée $p_1 = 10^6$ Pa. Les températures et les volumes dans l'état A et dans l'état B sont respectivement $T_A = T_f$, V_A, $T_B = T_f$ et V_B.
  Cette transformation fera l'objet d'un étude spécifique et à ce stade, rien n'est dit sur sa nature ni sa réalisation. On note simplement que le gaz dans l'état B est en équilibre thermique avec le thermostat Θ_f et qu'il n'y a pas, au cours de cette transformation, d'échange d'énergie thermique avec le thermostat Θ_c. On note $W_{A\to B}$ la quantité d'énergie échangée sous forme de travail par le système au cours de la transformation $A \to B$.
- Un échauffement monobare au contact du thermostat Θ_c de l'état d'équilibre B à l'état d'équilibre C. La température, le volume et la pression de l'état C sont respectivement $T_C = T_c$, V_C et $p_C = p_1$.
- Une détente adiabatique réversible qui fait passer le gaz de l'état d'équilibre C à l'état d'équilibre D. La température, le volume et la pression de l'état D sont respectivement T_D, V_D et $p_D = p_0$.
- De l'état d'équilibre D, un refroidissement monobare au contact du thermostat Θ_f ramène le système à l'état initial d'équilibre A.

a) Étude du cycle

1 - Les états d'équilibre

20/ Exprimer littéralement puis calculer numériquement les volumes V_A, V_B et V_C.

21/ Exprimer littéralement puis calculer numériquement la température T_D et le volume V_D.

22/ Positionner qualitativement les points d'équilibre A, B, C et D dans un diagramme de Watt (p, V).

23/ Exprimer littéralement puis calculer numériquement la variation d'entropie du système ΔS_{AB} entre les états d'équilibre A et B.

2 - Production d'entropie sur le cycle

24/ L'échange d'énergie sous forme de transfert thermique avec Θ_c ne s'effectue au cours du cycle que sur la transformation $B \to C$. Exprimer littéralement puis calculer numériquement Q_c.

25/ L'échange d'énergie sous forme de transfert thermique avec Θ_f s'effectue au cours du cycle sur la transformation $D \to A$ et sur la transformation $A \to B$. Exprimer littéralement Q_f en fonction de T_f, de T_c, de $W_{A\to B}$ et des constantes du problèmes.

26/ À partir de l'écriture du deuxième principe de la thermodynamique sur le cycle, déduire des questions précédentes une expression de l'entropie créée sur le cycle $S_{\text{créée,cy}}$ en fonction de T_f, de T_c, de $W_{A\to B}$ et des constantes du problème.

27/ En déduire que la diminution de l'entropie créée sur le cycle passe par la minimisation de $W_{A\to B}$.

b) Étude de la transformation $A \to B$

Dans le dispositif réel, le fluide traverse deux éléments technologiques différents qui le font passer de l'état d'équilibre A à l'état d'équilibre B :

- Le premier élément est un système de compression qui permet d'amener le fluide jusqu'à la pression haute p_1.
- Le second élément est une simple canalisation qui permet le transport du fluide sur de longues distances (ceci est lié au fait que dans le système étudié les thermostats sont très éloignés). Au cours de ce transport, le fluide échange de l'énergie sous forme de transfert thermique avec Θ_f (qui est ici l'atmosphère) et finit par atteindre l'équilibre avec cette source (état d'équilibre B). La transformation que subit le fluide dans la canalisation est supposée monobare.

L'objectif de cette partie du problème est d'étudier plusieurs types de systèmes à compression de façon à comprendre comment on peut minimiser $W_{A\to B}$.

1 - Compression simple - transformation (a)

Dans cette partie, on a un système de compression simple pour lequel l'air pris dans l'état d'équilibre A subit une compression adiabatique que l'on supposera réversible. Le fluide sort du compresseur dans l'état d'équilibre noté α_1 pour lequel $p_{\alpha_1} = p_1$. En sortie du compresseur, le fluide pénètre dans la canalisation.

28/ Exprimer littéralement puis calculer numériquement la température T_{α_1} et le volume V_{α_1} du système en sortie du compresseur.

29/ Exprimer littéralement puis calculer numériquement l'énergie échangée sous forme de travail par la masse de fluide au cours de la transformation $A \to \alpha_1$.

30/ Exprimer littéralement puis calculer numériquement l'énergie échangée sous forme de travail par la masse de fluide dans la canalisation au cours de la transformation $\alpha_1 \to B$.

31/ On note $W^{(a)}_{A\to B} = W_{A\to\alpha_1} + W_{\alpha_1\to B}$. Calculer sa valeur numérique. Représenter $W^{(a)}_{A\to B}$ sur un diagramme de Watt.

2 - Compression double - transformation (b)

On étudie dans cette partie un compresseur double étage :

- À partir de l'état d'équilibre A, le gaz est d'abord comprimé de façon adiabatique et réversible jusqu'à la pression $p_i = \mu p_0$, dans lequel μ est un nombre compris entre 1 et $\frac{p_1}{p_0}$. L'état d'équilibre atteint par le gaz à ce moment là est noté β_1, la température et le volume sont respectivement notés T_{β_1} et V_{β_1}.
- À partir de l'état β_1, le fluide est mis en contact avec Θ_f au travers d'un échangeur dans lequel il subit une transformation monobare. Il sort de l'échangeur dans l'état d'équilibre β_2 tel que la pression et la température sont respectivement $p_{\beta_2} = p_i$ et $T_{\beta_2} = T_f$.
- À partir de l'état β_2, le gaz est à nouveau comprimé de façon adiabatique et réversible jusqu'à la pression p_1. L'état d'équilibre atteint par le gaz à ce moment là est noté β_3, la température et le volume sont respectivement notés T_{β_3} et V_{β_3}.

En sortie du compresseur double étage (état β_3) le fluide pénètre dans la canalisation.

32/ Positionner qualitativement les points d'équilibre A,β_1,β_2,β_3 et B dans un diagramme de Clapeyron (p,V). Donner sur le même diagramme, l'allure des transformations adiabatiques.

33/ Donner l'expression de l'énergie échangée par la masse de gaz sous forme de transfert thermique au contact de Θ_f au cours de la succession de transformations qui mène de l'état A à l'état B dans ce nouveau dispositif. On la notera $Q^{(b)}_{A\to B}$.

34/ Donner l'expression de la température T_{β_1} en fonction de T_f, μ et γ.

35/ Donner l'expression de la température T_{β_3} en fonction de T_f, μ, $\frac{p_0}{p_1}$ et γ.

36/ Déduire des questions précédentes une expression littérale, en fonction de T_f, μ, $\frac{p_0}{p_1}$, γ, m, R, M_{air}, de l'énergie échangée par la masse de gaz sous forme de travail au cours de la succession de transformations qui mène de l'état A à l'état B dans ce nouveau dispositif. On la notera $W^{(b)}_{A\to B}$.

37/ Montrer qu'il existe une valeur de μ qui minimise la valeur de $W^{(b)}_{A\to B}$. Exprimer littéralement puis calculer numériquement cette valeur que l'on notera $\mu^\star$.

38/ Calculer numériquement $W^{(b)}_{A\to B}$ dans le cas où $\mu = \mu^\star$.