On ne parlera pas de Thomas Pesquet !

Durée 4h

Le sujet est constitué de quatre exercices indépendants. N'hésitez pas à tous les aborder tout en faisant apparaître clairement sur votre copie le passage d'un exercice à l'autre. Bon courage !

L'usage de calculatrices est autorisé.

Conseils pour aborder le devoir

- ⋆ Lire le sujet en entier avant d'écrire quoi que ce soit
- ⋆ Le sujet est long, comme le seront les sujets des concours : l'objectif n'est donc pas de le terminer mais de faire le maximum le plus proprement et le plus rigoureusement possible
- ⋆ Les parties peuvent être abordées dans n'importe quel ordre. En revanche, dans une partie donnée, les questions seront traitées dans l'ordre (mais vous pouvez passer des questions)
- ⋆ La rédaction (clarté, précision,...) et la présentation doivent être particulièrement soignées
- ⋆ N'oubliez pas d'encadrer les expressions littérales et de souligner les applications numériques
- ⋆ Si vous n'arrivez pas à démontrer un résultat dont vous avez besoin pour les questions suivantes, vous pouvez l'admettre, mais il faut bien le préciser sur votre copie
- ⋆ N'oubliez pas d'écrire un minimum français. Le correcteur a un seuil de tolérance qu'il s'agirait de ne pas dépasser...

Données numériques relatives au problème :

$G = 6,67.10^{-11}\ \mathrm{Nm^2 \cdot k^{-1}g^2}$	Constante universelle de gravitation
$m_T = 5,97.10^{24}$ kg	Masse de la Terre
$m_L = 7,34.10^{22}$ kg	Masse de la Lune
$T_L = 27,3$ jour $= 2,36e6$ s	Période de révolution de la Lune autour de la Terre
$r_P = 3,57.10^8$ m	Distance entre la Terre et la Lune au périgée
$r_A = 4,07.10^8$ m	Distance entre la Terre et la Lune à l'apogée
$a = \dfrac{r_P + r_A}{2} = 3,82.10^8$ m	Demi grand-axe de l'orbite de la Lune
$R_L = 1,74.10^6$ m	Rayon moyen de la Lune
$R = 8,31\ \mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$	Constante des gaz parfaits

Formulaire :

En coordonnées polaires, une trajectoire elliptique est donnée par l'équation :

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$$

avec p une constante appelée paramètre de l'ellipse, e l'excentricité de l'ellipse ($0 \leqslant e < 1$), r le rayon polaire et θ l'angle polaire. θ_0 est une constante.
On admettra que l'aire de l'ellipse est donnée par $\mathscr{A} = \pi\sqrt{a^3 p}$ avec a le demi grand-axe de l'ellipse.
Moment d'inertie d'une boule homogène de masse m et de rayon R autour d'un axe passant par son centre : $J = \dfrac{2}{5}mR^2$

Remarques :

- Dans cet énoncé, les dérivées temporelles seront notées avec des points : par exemple $\dfrac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}$ sera noté $\dot{x}$.
- On notera $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ les vecteurs de la base cartésienne et $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ ceux de la base cylindrique.

I - Teneur en élément azote d'un engrais

L'ammonitrate est un engrais azoté solide, bon marché, très utilisé dans l'agriculture. Il est vendu par sac de 500 kg et contient du nitrate d'ammonium $NH_4NO_3(s)$. Les indications fournies par le fabricant d'engrais sur le sac à la vente stipulent que le pourcentage en masse de l'élément azote N est de 34,4 %.

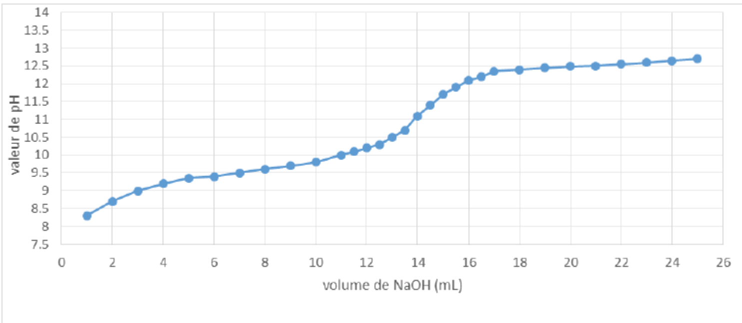
Afin de vérifier l'indication du fabricant, on dose les ions ammonium $NH_4^+(aq)$ présents dans l'engrais en introduisant dans un bécher $V_1 = 10,0$ mL d'une solution préparée en dissolvant 6,00 g d'engrais dans une fiole jaugée de $V_0 = 250$ mL. Cette solution est dosée à l'aide d'une solution d'hydroxyde de sodium NaOH de concentration $c = 0,200 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. À l'équivalence, le volume de soude ajouté V_E est de 14,0 mL.

1/ Le nitrate d'ammonium est très soluble dans l'eau. Écrire la réaction de dissolution correspondante.

2/ L'ion ammonium $NH_4^+(aq)$ est-il un acide ou une base selon Brönsted ? Justifier la réponse.

3/ Écrire l'équation de la réaction correspondant au titrage.

4/ La figure ci-après représente la courbe pH $= f(V_{\text{NaOH}})$. Indiquer une méthode graphique pour trouver le point d'équivalence. Donner les coordonnées de ce point en faisant apparaître vos constructions sur l'annexe à rendre avec la copie.



5/ Quelles sont toutes les espèces chimiques présentes dans le mélange réactionnel à l'équivalence ? Justifier le pH basique de la solution en ce point.

6/ Donner la formule littérale permettant de calculer la quantité de matière d'ions $NH_4^+(aq)$ dans la fiole jaugée en fonction des données.
L'application numérique donne $7,00.10^{-2}$ mol d'ions $NH_4^+(aq)$. En déduire la quantité de nitrate d'ammonium présente dans cette fiole.

7/ Calculer la masse d'azote (arrondie au gramme près) présente dans l'échantillon. Les indications du fabricant sont-elles correctes ?

II - Oxyde de zirconium

Les piles à combustible à oxyde solide permettent d'avoir en contact deux phases : solide et gazeuse, ce qui supprime les problèmes liés à la gestion de 3 phases, notamment la corrosion. Les électrodes sont poreuses de façon à permettre un transport rapide des gaz. Un matériau de choix pour l'électrolyte est l'oxyde de zirconium, appelé zircone, stabilisé à l'yttrium.

8/ Le zirconium se situe dans la classification périodique dans la colonne du titane, directement en dessous de cet élément. Dans quel bloc se situe-t-il ?

9/ Indiquer la configuration électronique fondamentale du titane et celle du zirconium.

10/ Énoncer les deux règles utilisées pour établir ces configurations électroniques.

La zircone peut être assimilée à un cristal ionique formé de cations Zr^{4+} et d'anions O^{2-} assimilés à des sphères dures de rayons respectifs r^+ et r^-. Les cations sont distribués aux nœuds d'un réseau cubique face centrée cfc.

11/ Représenter la maille conventionnelle d'une structure de cations cfc. Indiquer le nombre de cations par maille.

12/ Donner sans démonstration la compacité d'une telle structure dans le cas d'une maille métallique. Commenter.

13/ Indiquer où se situent les sites tétraédriques de cette maille. Combien y en a-t-il ?

14/ Exprimer le rayon maximal r^- de la particule sphérique pouvant s'insérer dans ces sites sans induire de déformation en fonction de a, le paramètre de la maille et de r^+.

Les anions occupent tous les sites tétraédriques de la maille cfc formée par les cations.

15/ Déterminer le nombre d'anions O^{2-} contenus dans cette maille.

16/ Indiquer alors la formule de la zircone.

17/ Donner la coordinence d'un anion par rapport au cation, et des cations par rapport aux anions.

18/ Exprimer la masse volumique de la zircone en fonction du paramètre de la maille a, de la masse molaire M_{Zr} du zirconium et de la masse molaire M_O de l'oxygène et du nombre d'Avogadro $\mathcal{N}_A$.

19/ La formule de l'oxyde d'yttrium est Y_2O_3. En déduire la charge du cation yttrium.

20/ Le dopage consiste à substituer dans la maille élémentaire de l'oxyde de zirconium une fraction molaire x des cations Zr^{4+} par des cations yttrium. Expliquer pourquoi l'électroneutralité de la structure n'est alors pas respectée.

21/ Proposer une modification de la formule chimique impliquant le nombre y d'anions O^{2-} présents dans la zircone dopée à l'oxyde d'yttrium, au moyen de x, pour rétablir cette électroneutralité.

III - Mouvement de la Lune

Le 3 janvier 2019, pour la toute première fois, une sonde, chang'e-4, a atterri avec succès sur la face cachée de la Lune, dans le cratère de Von Kármán.

Cette partie est divisée en deux sous-parties pouvant être traitées indépendamment. La première partie est consacrée au mouvement du centre de masse de la Lune autour de la Terre. La seconde propose un modèle permettant d'expliquer la raison pour laquelle la Lune possède une face cachée.

A) Mouvement du centre de masse de la Lune

Dans cette partie, on assimile la Lune à un point matériel L de masse m_L, et la Terre à un point matériel T de masse m_T.

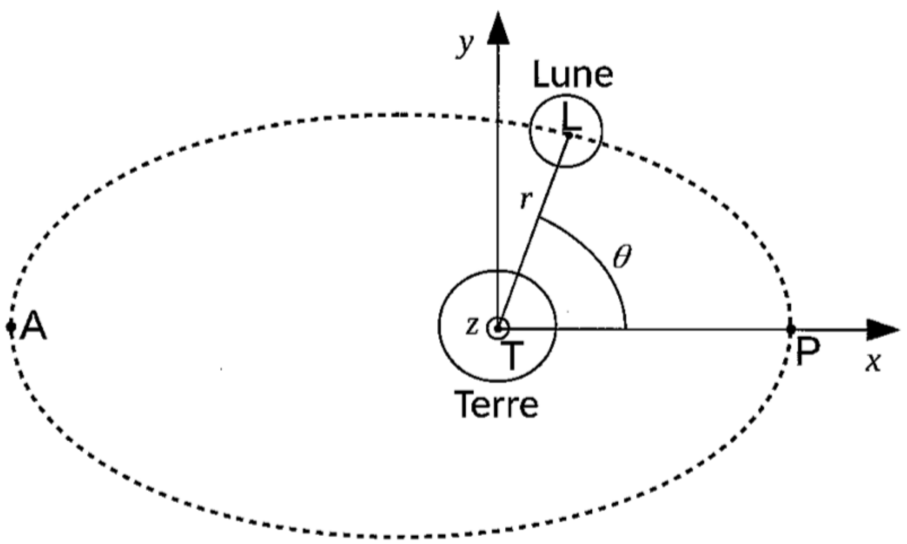


FIGURE 1 : Schématisation de la trajectoire de la Lune autour de la Terre

22/ Définir le référentiel de Copernic (appelé aussi référentiel héliocentrique), le référentiel géocentrique et le référentiel terrestre. À quelle(s) condition(s) peut-on considérer ces référentiels comme galiléens ?

Aspects dynamiques

23/ Donner l'expression de la force de gravitation $\vec{F_g}$ qu'exerce la Terre sur la Lune.

Dans la suite on se placera dans le référentiel géocentrique, qu'on supposera galiléen. On considèrera que $\vec{F_g}$ est la seule force à agir sur la Lune.

24/ Démontrer que le mouvement de la Lune est contenu dans un plan.

Par la suite, on se placera dans le plan de la trajectoire, et on utilisera les coordonnées polaires (r, θ) telles que schématisées figure 1.

25/ Exprimer les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{\mathscr{L}}_T$ en fonction de r, $\dot{r}$, C, m_L, $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_z$.

26/ On appelle C la constante des aires telle que $C = r^2\dot{\theta}$. Montrer que C est une constante du mouvement.

27/ Qu'appelle-t-on loi des aires (ou deuxième loi de Kepler) ? En justifiant le lien entre la vitesse aréolaire (dérivée de l'aire parcourue par le vecteur $\overrightarrow{TL}$ au cours du temps $\dfrac{\mathrm{d}\mathscr{A}}{\mathrm{d}t}$) et C, démontrer cette loi.

On définit le *vecteur excentricité* $\vec{e}$ par la relation :

$$\vec{e} = \frac{\vec{v} \wedge \vec{\mathscr{L}}_T}{Gm_T m_L} - \vec{e}_r$$

Avec $\vec{v}$ le vecteur vitesse de la Lune et $\vec{\mathscr{L}}_T$ le vecteur moment cinétique de la lune par rapport au centre de la Terre T.

28/ Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la Lune dans un référentiel adapté et justifier que l'accélération orthoradiale de la Lune soit nulle.

29/ Démontrer que le vecteur excentricité $\vec{e}$ est une constante du mouvement.

Quitte à redéfinir l'orientation des axes des coordonnées cartésiennes, on peut supposer qu'il est possible d'écrire $\vec{e} = ||\vec{e}||\,\vec{e}_x$.

30/ En effectuant le produit scalaire de $\vec{e}$ et de $\overrightarrow{TL}$, montrer que la trajectoire est elliptique. Justifier l'appellation « vecteur excentricité » de $\vec{e}$. Montrer que le paramètre de l'ellipse p est tel que $p = C^2/Gm_T$.

On note A l'apogée de la Lune et P le périgée.

31/ Définir les termes d'apogée et de périgée.

32/ Donner les valeurs de l'excentricité e et du paramètre p de la Lune en fonction uniquement de r_P et r_A. Faire les applications numériques correspondantes. En déduire la valeur numérique de la constante des aires C.

33/ En utilisant la loi des aires et l'expression de l'aire de l'ellipse donnée en début d'énoncé, montrer que la quantité $\dfrac{a^3}{T_L^2}$ est égale à $\dfrac{Gm_T}{4\pi^2}$ (ce résultat est indépendant du satellite de la Terre et constitue la troisième loi de Kepler).

34/ Montrer alors que la période de révolution de la Lune donnée dans l'énoncé est cohérente avec les autres grandeurs du problème.

Aspects énergétiques

35/ Exprimer l'énergie potentielle $E_p(r)$ de pesanteur de la Lune en fonction de r et des données du problème (on choisira de prendre $E_p = 0$ quand r tend vers $+\infty$).

36/ Exprimer l'énergie cinétique $E_c(r)$ de la Lune en fonction de r, $\dot{r}$ et $\dot{\theta}$ puis en fonction de r, $\dot{r}$, C et des paramètres du problème.

37/ Exprimer l'énergie mécanique E_m de la Lune et montrer qu'elle se conserve.

38/ En exprimant l'énergie mécanique à l'apogée et au périgée, montrer que l'énergie mécanique peut s'exprimer uniquement en fonction de G, m_L, m_T et a le demi grand-axe de l'orbite de la Lune. Donner alors sa valeur numérique.

On souhaite rejoindre la Lune à l'aide d'une fusée placée en orbite circulaire autour de la Terre, dans un plan contenant l'axe Terre-Lune. Pour simplifier l'étude, on considèrera maintenant que le mouvement du centre de la Lune autour de la Terre est circulaire, de rayon a. Les moteurs du troisième étage de la fusée sont alors allumés pendant une durée très courte : la vitesse de la fusée passe quasi instantanément de la vitesse v_0 à la vitesse v_1, de telle sorte que la nouvelle trajectoire soit elliptique de demi-grand axe environ égal à a.

39/ Exprimer l'énergie mécanique $E_{m,f}$ de la fusée lorsqu'elle suit cette trajectoire.

40/ En déduire l'expression de la vitesse v_1. Application numérique.

41/ Où est placée la Terre par rapport à cette ellipse ? À quel instant doit-on allumer les moteurs ?

42/ Évaluer numériquement la durée t_1 du transfert Terre-Lune.

B) Rotation propre de la Lune

Le fait que la Lune présente toujours la même face à la Terre est dû au fait que sa période de rotation propre autour d'elle-même est identique à sa période de rotation autour de la Terre. Un tel phénomène ne peut pas être une simple coïncidence mathématique : même un tout petit écart entre ces deux périodes de rotation aurait comme conséquence que l'ensemble de la surface de la Lune finirait par être visible depuis la Terre.
On se propose ici d'expliquer ce phénomène. On considère toujours que le mouvement du centre de la Lune autour de la Terre est circulaire, de rayon a, de période de révolution autour de la Terre T_L et de période de rotation propre T_p, avec, *a priori*, $T_p \neq T_L$.
On note $\omega_L = \dfrac{2\pi}{T_L}$ et $\omega_p = \dfrac{2\pi}{T_p}$ respectivement les vitesses angulaires de révolution de la Lune autour de la Terre et de rotation propre.
On commence par supposer que la lune reste sphérique comme représenté figure 2.

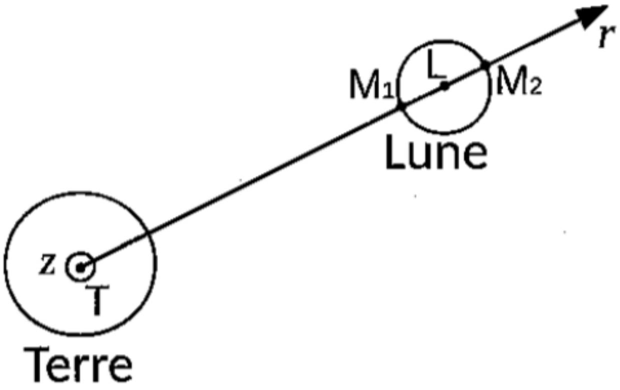


FIGURE 2 : Système Terre-Lune considérant une Lune sphérique

43/ Donner l'expression de $\Delta\vec{g} = \vec{g}(M_1) - \vec{g}(M_2)$, où $\vec{g}$ est le champ de pesanteur créé par la Terre, M_1 le point de la Lune le plus proche de la surface de la Terre, et M_2 le point le plus éloigné. Faire un développement limité de $\Delta\vec{g}$ à l'ordre 1 en R_L/a. Calculer numériquement $||\Delta\vec{g}||$.

Bien que de composition rocheuse, la Lune peut se déformer légèrement sous l'effet des différences de champ de pesanteur entre différents points de la Lune.

44/ Justifier alors qualitativement que la Lune adopte une forme ellipsoïdale.

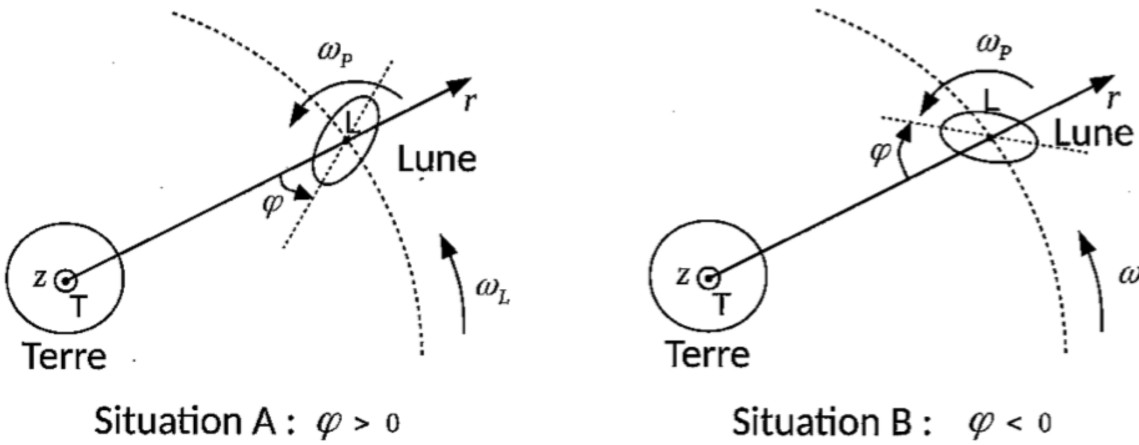


FIGURE 3 : Trajectoire de la Lune. Les flèches correspondant à ω_p et ω_L indiquent respectivement les sens de rotation de la Lune autour d'elle-même et de révolution autour de la Terre.

En raison de l'inertie, la déformation ne s'effectue pas instantanément mais avec un certain retard. On note alors φ l'angle entre le vecteur $\overrightarrow{TL}$ et l'axe de l'ellipsoïde de la Lune tel que schématisé figure 3. On admet par ailleurs que $0 \leqslant |\varphi| \leqslant 2\pi$.

Remarque : il est à noter que φ dépend de ω_p d'une manière qu'on ne cherchera pas à expliciter dans ce problème.

45/ Attribuer à chacune des situations A et B de la figure 3 les situations « $\omega_L > \omega_p$ » et « $\omega_L < \omega_p$ », en expliquant votre raisonnement.

Afin de simplifier l'étude, on suppose que la situation étudiée est équivalente à celle-ci : la Lune est une masse sphérique, de centre L et de masse $m_L - 2\Delta m$ à laquelle on rajoute deux masses Δm en deux points diamétralement opposés L_1 et L_2 tel que schématisé figure 4.

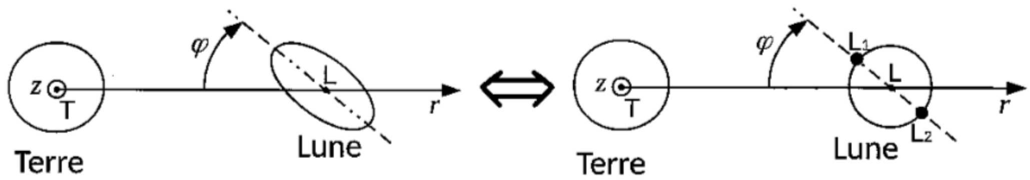


Figure 4 : Modélisation de la déformation de la Lune.

46/ En considérant que le moment d'inertie de la Lune reste le même qu'une boule homogène de rayon R_L, exprimer le moment cinétique $\mathscr{L}_p$ de la Lune par rapport à l'axe (Lz).

47/ On appelle $\mathscr{M}$ le moment total par rapport à l'axe (Lz) des forces de pesanteur exercées par la Terre sur les points L, L_1 et L_2. En effectuant des approximations légitimes, montrer, à l'aide d'un raisonnement qualitatif, que :

$$\mathscr{M} = -\frac{2GR_L m_T \Delta m}{a^2}\sin(\varphi)$$

48/ Peut-on appliquer le théorème du moment cinétique dans le référentiel sélénocentrique ? Justifier.

49/ Justifier néanmoins que ω_p tend vers ω_L quand t tend vers $+\infty$.

50/ La durée du jour terrestre est actuellement de 24 heures. À l'époque Jurassique (il y a environ 100 millions d'années), la durée du jour était d'environ 23 heures et était encore plus courte à des temps plus anciens. Expliquer.

Annexes à rendre avec la copie