



Régimes transitoires et établis

Durée 4h

Le sujet est constitué de deux exercices indépendants. N'hésitez pas à tous les aborder tout en faisant apparaître clairement sur votre copie le passage d'un exercice à l'autre. Bon courage!

L'usage de calculatrices est autorisé.

Conseils pour aborder le devoir

- ★ Lire le sujet en entier avant d'écrire quoi que ce soit
- ★ Le sujet est long, comme le seront les sujets des concours : l'objectif n'est donc pas de le terminer mais de faire le maximum le plus proprement et le plus rigoureusement possible
- ★ Les parties peuvent être abordées dans n'importe quel ordre. En revanche, dans une partie donnée, les questions seront traitées dans l'ordre (mais vous pouvez passer des questions)
- ★ La rédaction (clarté, précision,...) et la présentation doivent être particulièrement soignées
- ★ N'oubliez pas d'encadrer les expressions littérales et de souligner les applications numériques
- ★ Si vous n'arrivez pas à démontrer un résultat dont vous avez besoin pour les questions suivantes, vous pouvez l'admettre, mais il faut bien le préciser sur votre copie
- ★ N'oubliez pas d'écrire un minimum français. Le correcteur a un seuil de tolérance qu'il s'agirait de ne pas dépasser...

Suspension de véhicule

Sur un véhicule, les suspensions ont de multiples fonctions. Elles servent notamment :

- à améliorer le confort de ses occupants ;
- à améliorer la tenue de route en maintenant le contact entre les roues et le sol malgré ses irrégularités (amélioration de la sécurité) ;
- à diminuer l'effet, sur l'ensemble des organes mécaniques, des vibrations et impacts dus aux irrégularités de la route (diminution de l'usure et du risque de rupture).

Il existe différents types de suspensions et, dans ce problème, nous nous intéresserons à un type très répandu : les suspensions à ressorts. De manière simplifiée, ces suspensions se composent d'un ressort qui assure la liaison entre les roues (masses non suspendues) et la caisse (masse suspendue) et d'un système d'amortissement.

Le but de ce problème est d'étudier certaines caractéristiques des suspensions à ressort. En particulier, nous étudierons les mouvements verticaux du véhicule dans différentes situations : véhicule non amorti, véhicule amorti en régime libre, véhicule se déplaçant sur un sol non plat...

Pour l'ensemble du problème, le référentiel d'étude est le référentiel terrestre considéré comme galiléen.

Le véhicule est soumis au champ de pesanteur terrestre \vec{g} de norme $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Hypothèses :

Tout au long de cet exercice, on considèrera que :

- L'extrémité supérieure du ressort est en contact avec le véhicule et l'extrémité inférieure du ressort est reliée à une roue qui se trouve en contact avec le sol ;
- La roue reste en contact avec le sol à tout instant ;
- Les dimensions de la roue sont telles qu'on la suppose ponctuelle de sorte qu'elle suit parfaitement le profil de la route, y compris lorsque le sol n'est pas plat.

Notations :

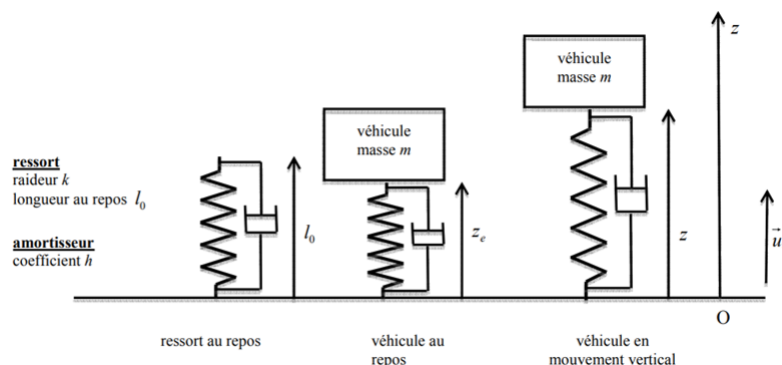
Pour une fonction $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$, on notera :

- $\underline{x}(t) = X_m e^{j(\omega t + \varphi)} = X_m e^{j\omega t} e^{j\varphi} = \underline{X}_m e^{j\omega t}$
- $x(t) = \text{Re}(\underline{x}(t))$ et $\underline{X}_m = X_m e^{j\varphi}$ (\underline{X}_m représente l'amplitude complexe de x)

On a donc : $X_m = |\underline{X}_m|$ et $\varphi = \arg(\underline{X}_m)$.

A) Suspension avec amortissement

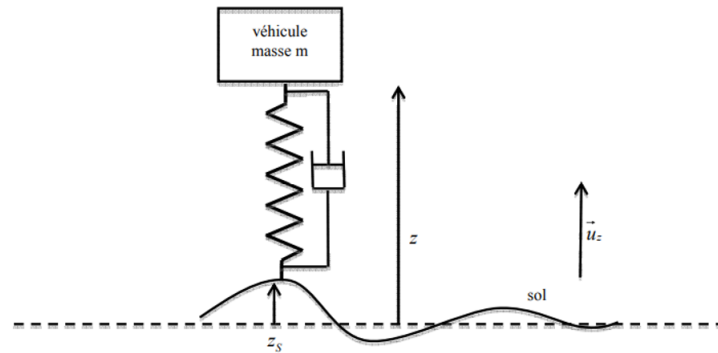
On suppose dans cette partie que la suspension décrite dans la partie précédente comporte maintenant un dispositif qui exerce, sur le véhicule de masse m , une force d'amortissement visqueux donnée par $\vec{F} = -h\vec{v}$ où \vec{v} représente la vitesse verticale du véhicule par rapport à la roue et h un coefficient appelé coefficient de frottement fluide.



- 1/ Quelle est l'unité de h dans le système international ?
- 2/ Faire le bilan des forces appliquées au véhicule hors d'équilibre. On détaillera clairement chaque force en indiquant sa direction son sens et sa norme.
- 3/ Écrire la relation entre ces différentes forces lorsque le véhicule est à l'équilibre. En déduire l'expression de la position d'équilibre du véhicule z_e .

- 4/ En appliquant le principe fondamental de la dynamique au véhicule hors d'équilibre, déterminer l'équation différentielle vérifiée par la coordonnée $z(t)$ au cours du temps.
- 5/ Écrire les conditions portant sur les paramètres m , k et h pour que la suspension se trouve respectivement dans les régimes pseudo-périodique, critique et apériodique.
- 6/ Si l'amortissement est tel que la suspension se trouve en régime critique lorsque le véhicule est à vide, dans quel régime se trouve-t-il lorsque le véhicule est en charge? Justifier qualitativement la réponse.
- 7/ Dès lors, comment choisir la valeur de l'amortissement pour que le véhicule ne soit pas en régime pseudo-périodique même lorsqu'il est en charge? Justifier qualitativement la réponse.

Le véhicule se déplace maintenant sur un sol plat. La position verticale du point bas de la suspension (roue) est repérée par la variable $z_s(t)$. Il est rappelé que, par hypothèse, la roue est considérée comme ponctuelle et reste à tout instant en contact avec le sol.



Nous nous placerons pour cette question dans le cas particulier où le véhicule se déplace sur une route telle que :

- pour $t < t_1$: $z_s(t) = z_1$ où z_1 est une constante positive et $t_1 > 0$.
- pour $t > t_1$: $z_s(t) = 0$.

Pour illustrer la situation, on pourra imaginer qu'à l'instant t_1 le véhicule descend d'un trottoir de hauteur z_1 et rejoint une route plane et horizontale d'altitude nulle.

On considère que, pour $t < t_1$, la cote $z(t)$ du véhicule est constante, c'est-à-dire que le véhicule se déplace en régime permanent.

- 8/ Donner l'allure de $z(t)$ pour t variant entre 0 et $t \gg t_1$ lorsque la suspension est en régime pseudo-périodique.
- 9/ Donner l'allure de $z(t)$ pour t variant entre 0 et $t \gg t_1$ lorsque la suspension est en régime apériodique.

On précisera clairement sur chaque graphique la valeur de z pour $0 < t < t_1$ et la valeur de z pour t tendant vers l'infini.

B) Régime forcé

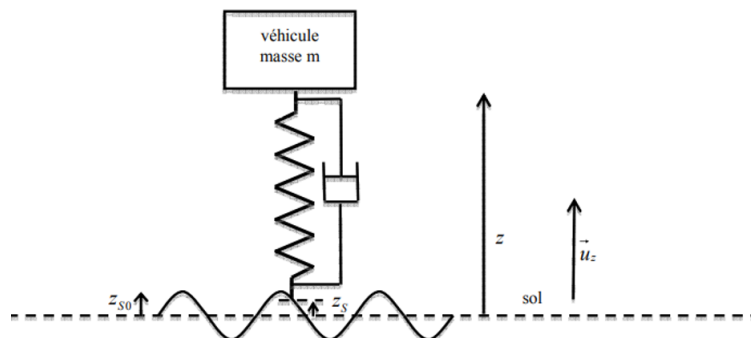
Dans cette partie, le véhicule se déplace horizontalement avec une vitesse constante v_1 .

Il est rappelé que, par hypothèse, la roue est considérée comme ponctuelle et reste à tout instant en contact avec le sol.

Ici encore, la position verticale du point bas de la suspension (roue) est repérée par la variable $z_s(t)$.

Dans cette partie, le véhicule se déplace sur un sol ondulé horizontal sinusoïdal.

On a donc $z_s(t) = z_{s,0} \cos \omega t$.



La suspension comporte un dispositif d'amortissement visqueux, son action sur le véhicule est modélisée par la force $\vec{F} = -h\vec{v}$ où \vec{v} représente la vitesse relative des deux extrémités de l'amortisseur et h le coefficient de frottement fluide.

On a donc : $\vec{F} = -h(\dot{z} - \dot{z}_s)\vec{u}_z$.

- 10/ Déterminer l'expression de la force exercée par le ressort de la suspension sur la masse m en fonction de k, z, z_s, l_0 et du vecteur unitaire \vec{u}_z .
- 11/ En appliquant la relation fondamentale de la dynamique, déterminer l'équation différentielle reliant les fonctions z et z_s et leurs dérivées temporelles ainsi que les paramètres h, m, k et z_e (où z_e représente la longueur du ressort à l'équilibre statique calculée à la question 3/).

Voulant étudier les oscillations de la masse m autour de sa position d'équilibre z_e , on posera $z' = z - z_e$.

- 12/ Montrer que l'équation différentielle précédente peut se mettre sous la forme :

$$m\ddot{z}' + h\dot{z}' + kz' = Y(t)$$

Déterminer l'expression de $Y(t)$ en fonction de z_s, \dot{z}_s, k et h .

Dans la suite de cette partie, on utilisera les notations complexes rappelées au début de l'énoncé.

Pour simplifier les notations, on posera :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \text{et} \quad 2\lambda = \frac{h}{m}$$

- 13/ Déterminer l'expression de la réponse complexe $\frac{Z'_m}{Z'_s}$ de la suspension en fonction de ω, ω_0 et λ .
- 14/ Montrer que le module de la réponse complexe est donné par l'expression :

$$G = \left| \frac{Z'_m}{Z'_{s,m}} \right| = \sqrt{\frac{\omega_0^4 + 4\lambda^2\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}$$

Vous pourrez, dans la suite, utiliser cette expression même si vous n'êtes pas parvenus à la démontrer.

- 15/ Déterminer la valeur vers laquelle tend G lorsque la pulsation ω tend vers 0. Décrire dans ce cas le comportement de la masse m par rapport au sol.
- 16/ Déterminer la valeur vers laquelle tend G lorsque la pulsation ω tend vers l'infini. Décrire dans ce cas le comportement de la masse m par rapport au sol.

On considère pour simplifier :

- que la valeur maximale de G est atteinte pour une pulsation ω_r telle que le **dénominateur** de l'expression précédente est minimal ;
- que l'on se trouve dans le cas où $\omega_0^2 > 2\lambda^2$.

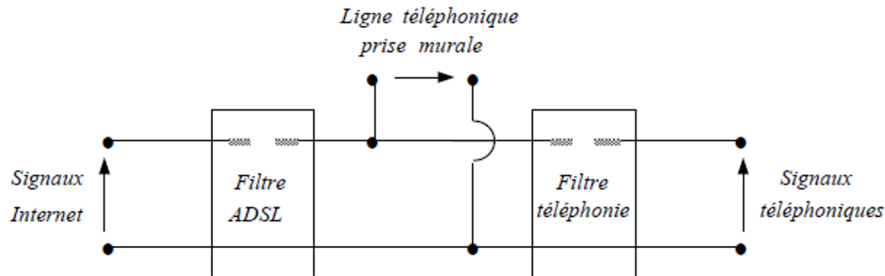
- 17/ Déterminer l'expression de ω_r en fonction de ω_0 et λ . À quoi correspond physiquement le cas où la pulsation est égale à ω_r .

En réalité, la détermination de la pulsation qui correspond à la valeur maximale de G aurait dû prendre en compte le fait que le numérateur de G dépend également de la pulsation. Le calcul complet conduit à des résultats sensiblement équivalents.

- 18/ Donner l'allure de la courbe représentant $G = \left| \frac{Z'_m}{Z'_s} \right|$ en fonction de ω . On fera apparaître les valeurs particulières déterminées dans les trois questions précédentes.

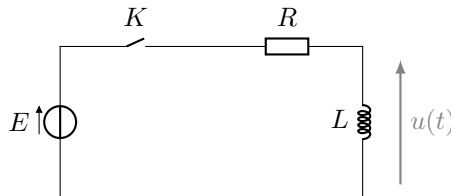
Récupération de signal

Les lignes téléphoniques acheminent les signaux téléphoniques traditionnels (fréquences f comprises entre 0 et 5,0 kHz) qui permettent les échanges de conversation et les signaux informatiques « internet » non fibrés (fréquences f comprises entre 25 kHz et 2,5 MHz). Le but de ce problème est d'étudier les différents filtres permettant de « récupérer » (ou non...) un seul type de signal.



Tous les signaux (tension et intensité) considérés dans cet exercice sont supposés alternatifs sinusoïdaux (**sauf indication précisée dans le texte**) : les grandeurs complexes associées sont soulignées.

A) Filtre du 1^{er} ordre



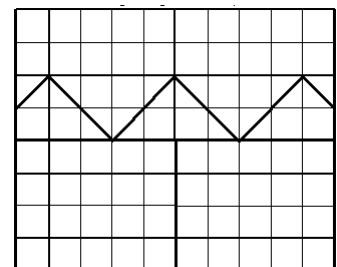
On s'intéresse au montage ci-dessus. La tension d'entrée s'écrit : $e(t) = E \cos \omega t$

On définit la grandeur $\omega_0 = \frac{R}{L}$ et f_0 la fréquence associée à ω_0 .

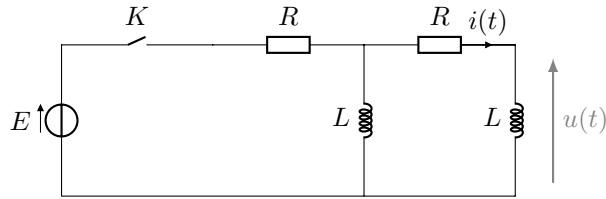
Données : $L = 20 \text{ mH}$ et $R = 40 \Omega$.

- 19/ En régime sinusoïdal forcé, quelle est la forme générale attendue pour la tension $u(t)$.
 - 20/ Déterminer sans calcul, la nature de ce filtre.
 - 21/ Quels signaux (téléphoniques ou informatiques) ce filtre est-il susceptible de « récupérer » ?
 - 22/ Établir l'expression de la fonction de transfert \underline{H} de ce filtre à l'aide de ω , j et ω_0 .
 - 23/ Définir puis déterminer la fréquence de coupure f_c de ce filtre. Faire l'application numérique (on gardera deux chiffres significatifs pour le résultat). Ce filtre peut-il servir pour la récupération des signaux identifiés à la question 21/.
 - 24/ Tracer le diagramme de Bode asymptotique de ce filtre.
 - 25/ Que vaut l'amplitude et la phase à l'origine de $u(t)$ pour une fréquence égale à f_c et pour $E = 2 \text{ V}$?
- Le signal d'entrée est maintenant de la forme $e(t) = E \cdot (\cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t))$ avec $E = 2 \text{ V}$.
- 26/ Écrire l'expression générale de la tension de sortie. Que devient-elle pour $f_1 = f_0/10$ et $f_2 = 10f_1$.
 - 27/ Le filtre a-t-il un comportement intégrateur ou dérivateur à basses fréquences ($f \ll f_c$) ? Justifier.
 - 28/ Le signal d'entrée $e(t)$ n'est plus sinusoïdal. Il s'agit maintenant d'un signal triangulaire $e(t)$ variant de 0 V à $E = 2 \text{ V}$. La figure ci-contre représente une allure de $e(t)$ à l'oscilloscope : la base de temps est de 5 mV/div.

- a/ Que vaut la période T puis la fréquence f de $e(t)$?
- b/ Comparer la fréquence à la fréquence de coupure du filtre.
- c/ Représenter (sans souci d'échelle verticale) sur le document réponse l'allure de la tension $u(t)$ obtenue en sortie. Justifier.
- d/ Déterminer l'expression de l'amplitude U de $u(t)$ à l'aide de f , f_0 et E . Faire l'application numérique.



B) Filtre RL en cascade du second ordre



On s'intéresse au montage donné ci-dessus. La tension d'entrée s'écrit : $e(t) = E \cos \omega t$.

Données : $L = 20 \text{ mH}$ et $R = 40 \Omega$.

29/ Déterminer, sans calcul, la nature de ce filtre.

30/ Montrer que la fonction de transfert du filtre s'écrit

$$\underline{H} = \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2} - 3j\frac{1}{x}}$$

avec $x = \omega/\omega_0$ pulsation réduite.

On pourra introduire la tension $u'(t)$ aux bornes de la bobine au milieu du filtre.

31/ Déterminer le domaine de valeurs prises par $\varphi = \arg(\underline{H})$.

32/ Tracer le diagramme de Bode asymptotique de ce filtre.

33/ On admet que ce filtre ne présente pas de résonance et que la valeur numérique de la pulsation réduite de coupure est établie par le calcul à $x_c = 2,67$. Superposer une allure du gain (en décibel) réel sur le diagramme précédent. On précisera les valeurs numériques qu'on jugera pertinentes.

34/ Calculer la valeur numérique de f_c . Ce filtre peut-il être utilisé pour ne « récupérer » que les signaux informatiques? Justifier.

C) Petit interlude transitoire

35/ Montrer, par la méthode de votre choix, que l'équation différentielle régissant l'évolution de $u(t)$ est :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{3}{\tau} \frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau^2} u(t) = \frac{d^2 e}{dt^2} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R} = \frac{1}{\omega_0^2}$$

36/ On se place dans le cas où $e(t)$ est un échelon de tension : $e(t) = E$ pour $t > 0$ et $e(t) = 0$ pour $t < 0$.

Le circuit est ouvert depuis longtemps à $t < 0$ et on admet que $\frac{du}{dt} = -\frac{3E}{\tau}$.

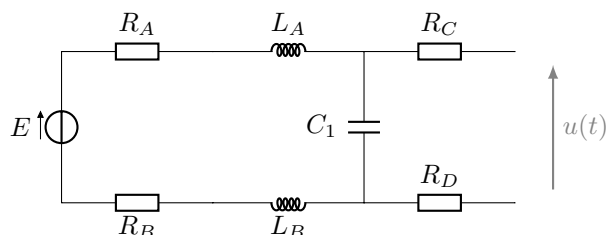
(a) Résoudre l'équation différentielle.

(b) Tracer l'allure de $u(t)$.

D) Filtre ADSL

Il reste encore de nombreuses zones non desservies par la fibre. Les boîtes internet utilisées dans ces zones utilisent l'ADSL - pour Asymmetric Digital Subscriber Line - pour pouvoir simultanément téléphoner et rester connecté à internet, il faut équiper les prises téléphoniques d'un filtre ADSL.

On a représenté sur le circuit ci-dessous une version simplifiée du filtre qui nous intéresse :



Données : $L_A = L_B = 10 \text{ mH}$ / $R_A = R_B = R_C = R_D = 20 \Omega$ / $C_1 = 20 \text{ nF}$

37/ Par une étude du schéma simplifié à basses et hautes fréquences, déterminer le comportement de ce filtre et en déduire sa nature.

On place en sortie du filtre une résistance R_0 de 600Ω qui simule la résistance d'un téléphone.

- 38/** Dessiner le schéma électrique obtenu. Reprendre l'étude précédente à basse fréquence et haute fréquence. La présence de R_0 modifie-t-elle la nature du filtre ?

Ce dernier montage est celui étudié dans la suite de cette partie.

- 39/** L'étude précédente est-elle en accord avec le diagramme de Bode donné dans le document réponse en fin de sujet ? Justifier.
- 40/** En faisant apparaître vos tracés sur le document à rendre avec la copie, déterminer graphiquement la fréquence de coupure f_c à -3 dB de ce filtre. Ce filtre peut-il être utilisé pour ne « récupérer » que les signaux téléphoniques ? Justifier.
- 41/** On propose la forme canonique suivante pour le filtre étudié :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\frac{f}{Qf_0} - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}$$

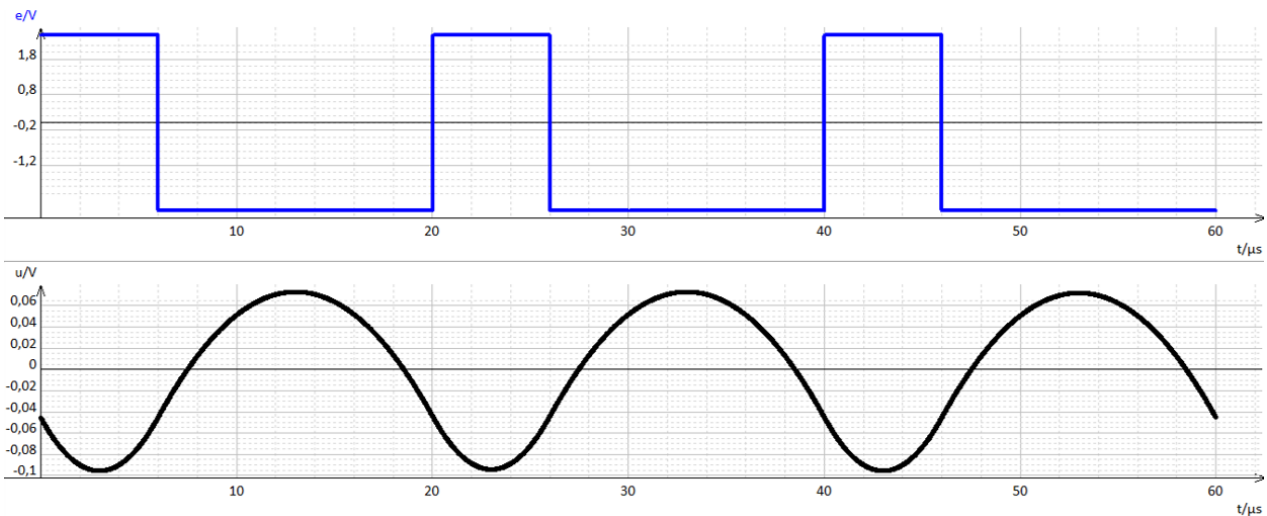
- (a) Justifier que cette expression est cohérente avec la nature du filtre déterminée à la question 38/.
- (b) Déterminer les valeurs de f_0 , Q et H_0 en exploitant les graphiques de G_{dB} et ϕ . On expliquera clairement le raisonnement suivi.
- (c) La valeur de H_0 est-elle en accord avec les valeurs données des résistances ?

Les signaux numériques sont des tensions pouvant prendre 2 valeurs.

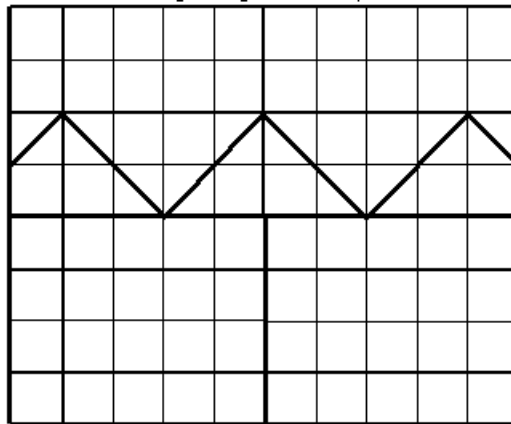
Le graphique de la figure ci-dessous représente un signal de type créneau dissymétrique (signal d'entrée $e(t)$) de fréquence 50 kHz et sa réponse $u(t)$ en sortie du filtre ADSL.

L'observation est faite à l'oscilloscope en mode CA.

- 42/** Interpréter le signal $u(t)$: analyser la forme du signal et son amplitude.



Annexes à rendre avec la copie
 Question c/ :



Questions 40/ et 41/b :

