Premier ordre

Durée 3h30

Le sujet est constitué de quatre exercices indépendants. N'hésitez pas à tous les aborder tout en faisant apparaître clairement sur votre copie le passage d'un exercice à l'autre. Bon courage !

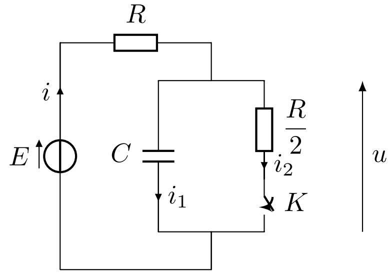
L'usage de calculatrices est autorisé.

Conseils pour aborder le devoir

- ⋆ Lire le sujet en entier avant d'écrire quoi que ce soit
- ⋆ Le sujet est long, comme le seront les sujets des concours : l'objectif n'est donc pas de le terminer mais de faire le maximum le plus proprement et le plus rigoureusement possible
- ⋆ Les parties peuvent être abordées dans n'importe quel ordre. En revanche, dans une partie donnée, les questions seront traitées dans l'ordre (mais vous pouvez passer des questions)
- ⋆ La rédaction (clarté, précision,...) et la présentation doivent être particulièrement soignées
- ⋆ N'oubliez pas d'encadrer les expressions littérales et de souligner les applications numériques
- ⋆ Si vous n'arrivez pas à démontrer un résultat dont vous avez besoin pour les questions suivantes, vous pouvez l'admettre, mais il faut bien le préciser sur votre copie
- ⋆ N'oubliez pas d'écrire un minimum français. Le correcteur a un seuil de tolérance qu'il s'agirait de ne pas dépasser...

Circuit RC

On étudie le circuit ci-contre. L'interrupteur K est ouvert depuis très longtemps, et le régime permanent est atteint.
À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur.
On s'intéresse à l'évolution temporelle des différentes grandeurs électriques dans le circuit après la fermeture de l'interrupteur K.
Le circuit est alimenté par un générateur idéal de tension de force électromotrice $E > 0$.

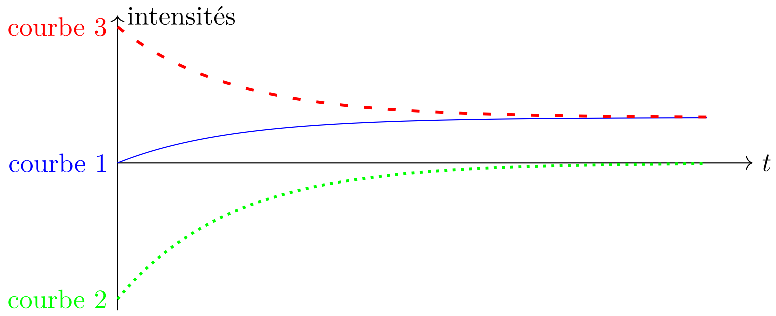


1/ Représenter le circuit pour les instants $t < 0$ (l'interrupteur K étant ouvert depuis très longtemps). Déterminer à l'instant $t = 0^-$, c'est-à-dire juste avant la fermeture de l'interrupteur, les valeurs de i_1 et i_2, puis i, et enfin u (on vérifiera notamment que $u(0^-) \neq 0$).

2/ En déduire, à l'instant $t = 0^+$ (juste après la fermeture de l'interrupteur), les valeurs de u, puis i et i_2, et enfin i_1.

3/ Déterminer les valeurs de u, i_1, i_2 et i au bout d'un temps très long après la fermeture de l'interrupteur.

4/ On fournit les courbes d'évolution des intensités. Relier, en justifiant, chaque courbe à l'intensité correspondante.



5/ Établir l'équation différentielle vérifiée par u. L'écrire sous forme canonique et en déduire la constante de temps τ caractéristique de l'évolution de u en fonction de R et C.

6/ La résoudre complètement.

7/ Parmi les courbes 1, 2 et 3 données en annexe, indiquer, en justifiant, celle qui peut représenter $u(t)$.

8/ Déterminer graphiquement la valeur de la constante de temps τ du circuit à partir de la courbe choisie. On précisera et justifiera la méthode utilisée en annotant la courbe choisie.

9/ Déduire de la question 6/ les expressions de $i_2(t)$, $i_1(t)$ et $i(t)$.

10/ Exprimer l'énergie fournie par le condensateur au reste du circuit au cours du régime transitoire.

Des bulles de champagne pour Noël !

L'objectif de l'exercice est d'étudier la remontée des bulles dans le champagne, liquide de masse volumique $\rho_{\text{liq}} \simeq 1 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$. Les bulles sont constituées de CO_2, de masse volumique $\rho_{\text{gaz}} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ à la pression $p \simeq 1$ bar. La force $\overrightarrow{f}$ exercée par le champagne sur la bulle est modélisée par la relation de Stokes :

$$\overrightarrow{f} = -6\pi\eta r\overrightarrow{v}$$

où $\eta \simeq 1.10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ est la viscosité du champagne, $r \simeq 1$ mm le rayon de la bulle et $\overrightarrow{v}$ la vitesse de la bulle.

On rappelle que la poussée d'Archimède $\overrightarrow{\Pi}$ s'exerçant sur une bulle de champagne est donnée par la relation :

$$\overrightarrow{\Pi} = -\rho_{\text{liq}} V \overrightarrow{g}$$

avec $\overrightarrow{g}$ l'intensité de la pesanteur dirigée verticalement et orientée vers le bas, ρ_{liq} la masse volumique du champagne et V le volume de la bulle donné par $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$.

L'étude est menée dans le référentiel terrestre considéré galiléen, auquel on adjoint un repère d'espace $(O, \vec{e}_z)$ vertical vers le haut.

La bulle est soumise à l'action de la poussée d'Archimède et de la force de Stokes donnée ci-dessus.

11/ Montrer que le poids est négligeable devant la poussée d'Archimède. *Pour les questions suivantes, on ne prendra donc pas en compte le poids.*

12/ Établir l'équation différentielle vérifiée par la composante v_z de la vitesse de la bulle sur l'axe z et l'écrire sous la forme :

$$\frac{dv_z}{dt} + \frac{v_z}{\tau} = \frac{v_{\text{lim}}}{\tau}$$

Exprimer les paramètres τ et v_{lim} en fonction des masses volumiques ρ_{liq} et ρ_{gaz} et de η, g et r.

13/ Résoudre cette équation différentielle et représenter l'allure de v_z au cours du temps. Indiquer v_{lim} et τ sur la courbe et donner leur interprétation physique.

14/ Calculer numériquement τ. Quelle approximation peut-on effectuer sur l'expression de v_z ?

L'émission des bulles se fait la plupart du temps de manière périodique, ce qui rend l'étude plus aisée. La méthode expérimentale utilisée par Gérard Liger-Belair et son équipe du laboratoire d'Œnologie de Reims est présentée ci-dessous. Ils ont photographié un train de bulles dans une flûte de champagne à un instant donné en se servant d'un appareil photographique dont l'ouverture du diaphragme est synchronisée avec le flash d'un stroboscope qui émet des éclairs régulièrement espacés à la fréquence f_b. Un écran diffusant est interposé entre le verre et le flash afin d'homogénéiser la lumière. Les distances sont étalonnées à l'aide d'un papier millimétré collé à la surface du verre. Un schéma du dispositif et un exemple de cliché obtenu est représenté ci-dessous.

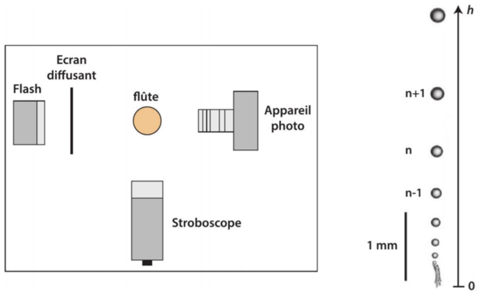


Figure 1 : Dispositif expérimental pour l'étude de la remontée des bulles de champagne

15/ Expliquer en quoi un choix judicieux de la fréquence f_b permet d'avoir accès, en un seul cliché, à une succession de positions occupées par une bulle ?

16/ Le cliché précédent a été pris avec $f_b = 20$ Hz. Justifier que la vitesse v_n d'une bulle indicée n peut être évaluée par :

$$v_n = f_b \frac{h_{n+1} - h_{n-1}}{2}$$

où h_{n+1} et h_{n-1} représentent respectivement les altitudes des bulles indicées $n+1$ et $n-1$. Effectuer l'application numérique pour la bulle indicée n sur la figure du dispositif.

17/ L'allure des positions des bulles sur la photographie est-elle en accord avec l'hypothèse formulée question 14/ ? Expliquer.

On peut également mesurer le rayon de chaque bulle, ce qui permet finalement de tracer la vitesse en fonction du rayon, comme représenté ci-dessous.

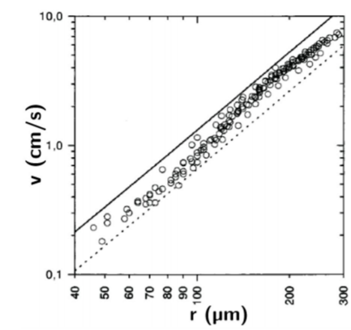


Figure 2 : Vitesse de remontée de la bulle en fonction du rayon

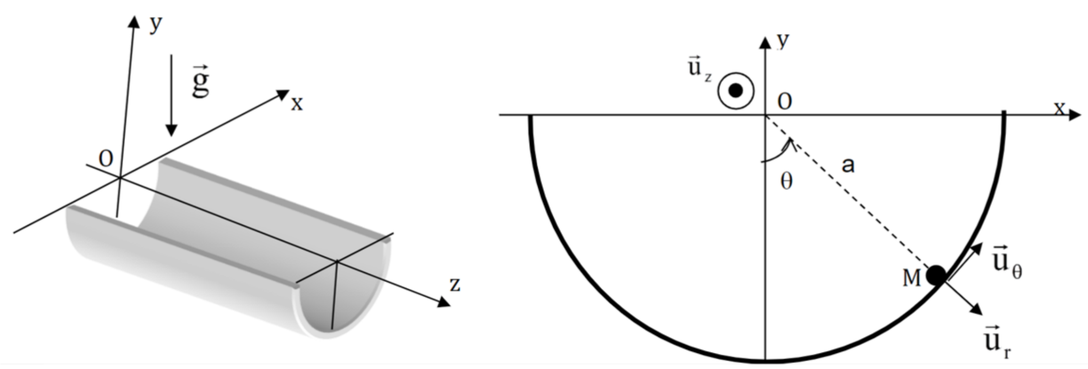
18/ Montrer analytiquement que $\log v_{\text{lim}} = A + 2 \log r$, où A est une constante et log la fonction logarithme décimal. Justifier que cette expression est cohérente avec la figure.

Bille dans une gouttière

L'étude est réalisée dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Le système étudié est une bille de masse m et de dimensions réduites, modélisée par un point.
On néglige les frottements. On note $\vec{g}$ le vecteur intensité de la pesanteur.
La bille est déposée sans vitesse initiale dans une gouttière hémi-cylindrique de rayon a. Elle reste en permanence au contact de la gouttière.
On note $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ les vecteurs unitaires de la base cylindrique.
On repère la position de la bille par l'angle θ(t)dans le plan (xOy) et sa coordonnée z(t) : voir figures ci-dessous.
Les conditions initiales sont $\theta(0) = \theta_0 = 10°$ et $z(0) = 0$.

A) Gouttière horizontale



L'axe (Oz) de la gouttière est horizontal, (Ox) est horizontal, (Oy) est vertical ascendant.

19/ Justifier la pertinence de l'utilisation d'un repérage cylindrique.

20/ Donner l'expression des vecteurs vitesse et accélération en coordonnées cylindriques, à l'aide de a, des dérivées temporelles de θ et de z, et des vecteurs unitaires de la base cylindrique ($\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_z$).

21/ Faire un bilan des forces : les représenter sur un schéma sur votre copie. Les décomposer dans la base cylindrique.

22/ Justifier que le mouvement reste dans le plan (xOy).

23/ Déterminer l'équation différentielle régissant l'évolution de $\theta(t)$. Nous la noterons (E).

24/ Déduire de cette équation une relation entre $\dot{\theta}^2$ et θ.

25/ En déduire une expression de la réaction $\overrightarrow{N}$ du support.

26/ Pour quelle valeur de θ la bille risque-t-elle de décoller ? Faire l'application numérique.

Pour vérifier si la bille peut décoller, il nous faut une expression de θ.

27/ Montrer que dans le cas où « les angles restent petits » (on a alors $\sin(\theta) \approx \theta$ si θ est exprimé en radians et $\cos(\theta) \approx 1$), l'équation (E) peut s'écrire sous la forme :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad (E')$$

où on précisera l'expression de ω_0. Comment appelle-t-on un système décrit par une telle équation ?

28/ Quelle est la position d'équilibre de la bille ? Justifier.

29/ Résoudre l'équation (E') et donner l'expression de $\theta(t)$ correspondant au problème physique étudié.

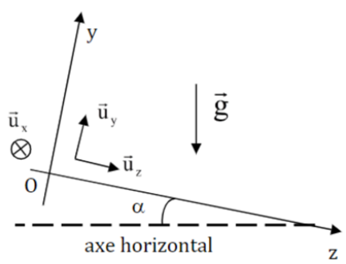
30/ Le mouvement est-il périodique ? Si oui, donner l'expression de la période d'évolution de θ au cours du temps.

31/ L'approximation des petits angles est-elle vérifiée dans notre cas ?

32/ La condition de décollement trouvée en question 26/ peut-elle être vérifiée ?

B) Gouttière inclinée

La gouttière est inclinée de sorte que l'axe (Oz) fasse un angle α constant par rapport à l'horizontale ; (Oy) est aussi incliné d'un angle α par rapport à la verticale et (Ox) demeure horizontal : voir schéma ci-contre. Les conditions initiales restent les mêmes pour la bille.



33/ Donner l'expression du poids dans la base cartésienne ($\vec{u}_x$,$\vec{u}_y$,$\vec{u}_z$) inclinée puis dans la base cylindrique ($\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_z$).

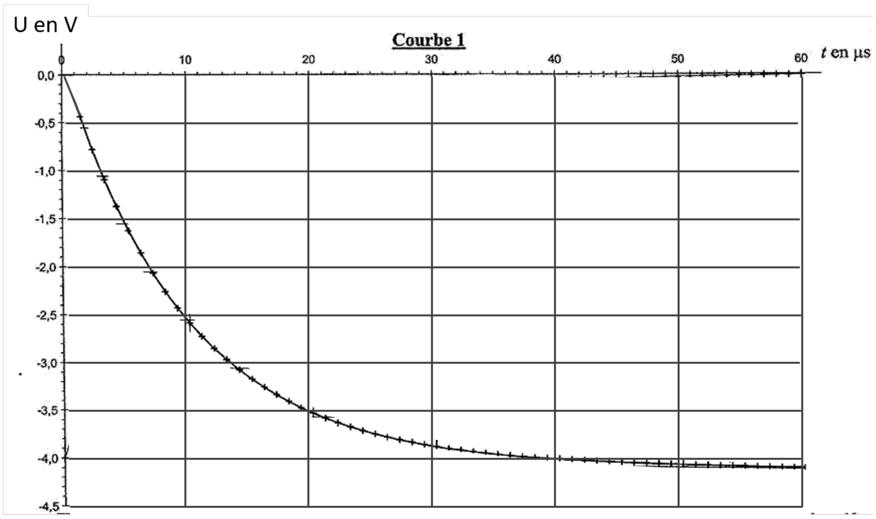
34/ Déterminer $z(t)$ à l'aide de g, α et t.

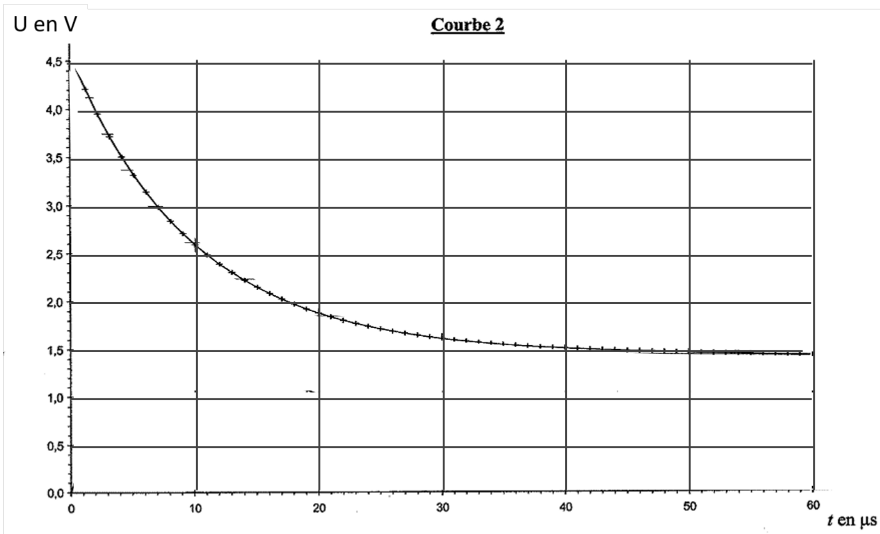
35/ Aux petits angles, déterminer $\theta(t)$ à l'aide de θ_0, a, g, α et t.

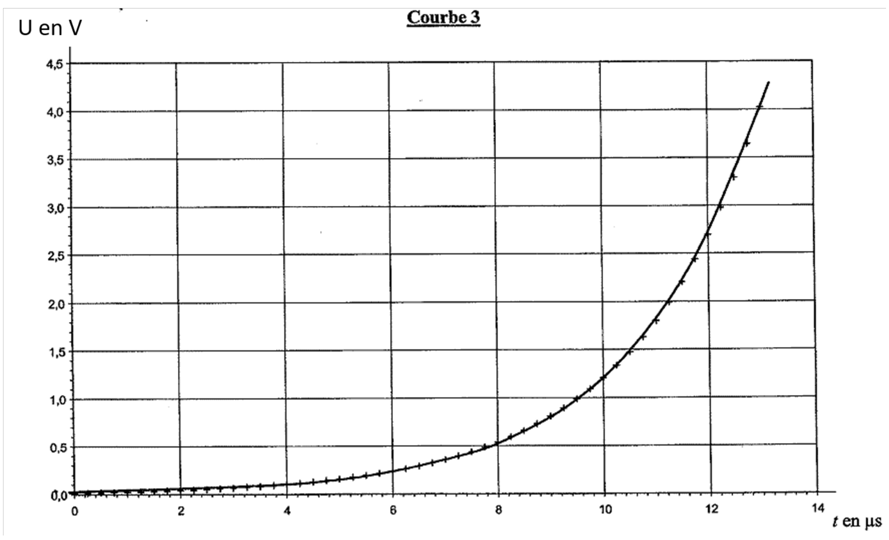
36/ On veut déterminer la trajectoire projetée dans le plan (xOz) dans le cas des petits angles.

Montrer que $x(z) = a\theta_0 \cos\left(\sqrt{\dfrac{2z}{a.\tan\alpha}}\right)$. Dessiner une allure de $x(z)$.

Annexes


U en V
Courbe 1
t en µs
0 10 20 30 40 50 60
0,0 -0,5 -1,0 -1,5 -2,0 -2,5 -3,0 -3,5 -4,0 -4,5


U en V
Courbe 2
4,5 4,0 3,5 3,0 2,5 2,0 1,5 1,0 0,5 0,0
0 10 20 30 40 50 60
t en µs


U en V
Courbe 3
4,5 4,0 3,5 3,0 2,5 2,0 1,5 1,0 0,5 0,0
0 2 4 6 8 10 12 14
t en µs