



Concours Blanc Physique

Durée 3h

Le sujet est constitué de plusieurs exercices indépendants. N'hésitez pas à tous les aborder tout en faisant apparaître clairement sur votre copie le passage d'un exercice à l'autre. Bon courage!

L'usage de calculatrices est autorisé.

Conseils pour aborder le devoir

- ★ Lire le sujet en entier avant d'écrire quoi que ce soit
- ★ Le sujet est long, comme le seront les sujets des concours : l'objectif n'est donc pas de le terminer mais de faire le maximum le plus proprement et le plus rigoureusement possible
- ★ Les parties peuvent être abordées dans n'importe quel ordre. En revanche, dans une partie donnée, les questions seront traitées dans l'ordre (mais vous pouvez passer des questions)
- ★ La rédaction (clarté, précision,...) et la présentation doivent être particulièrement soignées
- ★ N'oubliez pas d'encadrer les expressions littérales et de souligner les applications numériques
- ★ Si vous n'arrivez pas à démontrer un résultat dont vous avez besoin pour les questions suivantes, vous pouvez l'admettre, mais il faut bien le préciser sur votre copie
- ★ N'oubliez pas d'écrire un minimum français. Le correcteur a un seuil de tolérance qu'il s'agirait de ne pas dépasser...

Données numériques relatives au sujet :

$$\begin{array}{ll} g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} & \text{Accélération de la pesanteur} \\ \rho = 11350 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} & \text{Masse volumique du plomb solide} \\ \rho_a = 1,23 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} & \text{Masse volumique de l'air} \end{array}$$

I - Trajectoires des plombs d'une cartouche

Un fusil de chasse¹ (arme à feu) ou de ball-trap permet d'envoyer à distance des projectiles au moyen de gaz produits par la combustion rapide et confinée d'un composé chimique. La déflagration va éjecter de la bouche du fusil les sphères de plomb qui étaient dans la cartouche avec une vitesse qui, en moyenne, vaut $v_0 = 380 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, valeur à utiliser dans toutes les applications numériques ultérieures.

Document 1

Les données suivantes sont fournies par un fabricant de cartouches de fusil de chasse (contenant de la grenaille de plomb ou de fer doux, dont les projectiles sont appelés « plombs » quelle que soit leur nature). La photographie ci-dessous est celle d'une cartouche en partie dénudée.



La vitesse de vol des billes de plomb dépend en premier lieu de leur taille. Avec une même vitesse de départ on obtient des différences considérables puisque, en raison de leur masse moins importante, les plombs de petit diamètre perdent plus de vitesse pour une même distance parcourue, face à la résistance de l'air à laquelle ils sont confrontés. La distance de sécurité de la grenaille de plomb, c'est-à-dire la distance au-delà de laquelle il n'y a plus danger pour les tiers, peut être déterminée à partir de la règle grossière suivante : diamètre des plombs $\times 100 =$ zone dangereuse en m. Exemple : pour des plombs de 3 mm : $3 \times 100 = 300 \text{ m}$.

Voilà la distance maximale possible avec l'angle de tir le plus favorable, à ne pas confondre avec la portée utile, qui est beaucoup plus faible. Dans le cas de la grenaille de fer doux, cette distance de sécurité est nettement plus faible en raison de la moindre densité des billes. Par contre, en cas d'agglutination, les billes agglutinées constituent des projectiles d'un poids supérieur qui peuvent être dangereux à des distances beaucoup plus grandes. Selon la taille des grains, la portée utile avec de la grenaille de plomb est de 35 à 40 m tout au plus. Au-delà, la dispersion est trop grande de sorte qu'il n'y a plus de couverture suffisante. La puissance de pénétration et la létalité des plombs diminuent avec l'augmentation de la distance de tir et ce, d'autant plus rapidement que les plombs sont plus petits.

Nous allons vérifier ces affirmations.

Nous considérons la trajectoire d'un plomb de cartouche dont la dimension est typiquement de quelques millimètres et la masse inférieure au gramme. On néglige la poussée d'Archimède.

A) Équation du mouvement

Le projectile est a priori soumis à deux forces : son poids et la force de frottement fluide exercée par l'air qui, dans les cas considérés, est constituée de la traînée aérodynamique qui s'écrit :

$$\vec{F}_D = -\frac{1}{2}\rho_a S C_D v \vec{v}$$

où v est la norme du vecteur vitesse \vec{v} du projectile, ρ_a est la masse volumique de l'air, $S = \pi R^2$ est la section de l'objet exposée au fluide dans la direction de l'écoulement et C_D est un coefficient sans dimension appelé

1. Je précise, avant toute chose, que j'ai choisi ce sujet car je le trouve très intéressant physiquement et en aucun cas pour faire la promotion de la chasse. Personnellement, je ne suis d'ailleurs pas très attiré par cette activité pour diverses raisons mais, je ne dispose pas de ressources infinies sur le programme de MPSI, je fais avec ce que je peux...

« coefficient de traînée ». Pour les vitesses typiques étudiées (vitesses supersoniques situées entre 375 et 420 m/s) et pour les formes quasi-sphériques de projectiles, C_D est de l'ordre de 0,44.

- 1/ Établir l'équation différentielle du mouvement du centre de masse du plomb de masse m .

On confondra, par la suite, le plomb avec une masse ponctuelle à laquelle on appliquera la force de traînée aérodynamique.

B) Premier modèle : trajectoire gravitaire

On considère le cas où la vitesse initiale du projectile est suffisamment faible pour que l'on puisse négliger la force de frottement fluide de l'air.

- 2/ Montrer que cela correspondrait à une vitesse initiale v_0 , obéissant à l'inégalité :

$$v_0 \ll \sqrt{\frac{2mg}{\rho_a \pi R^2 C_D}}$$

Par la suite, on notera $v_\infty = \sqrt{\frac{2mg}{\rho_a \pi R^2 C_D}}$

- 3/ Projeter l'équation du mouvement sur la base cartésienne (figure 1). On note θ l'angle de la vitesse \vec{v} avec le plan horizontal et θ_0 sa valeur à l'instant initial. On prend un repère tel que $\vec{v}_0 = v_0(\cos\theta_0\vec{i} + \sin\theta_0\vec{j})$ et dont l'origine O est la position de la particule à l'instant initial.

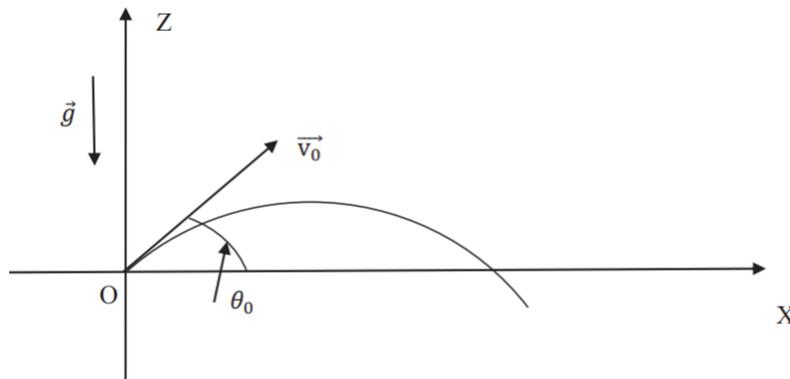


FIGURE 1 : Trajectoire du projectile

- 4/ Établir les équations paramétriques de la vitesse et de la position en fonction du temps.
 5/ Quelle est la nature de cette trajectoire dite « gravitaire » ?
 6/ Montrer que la portée du tir, c'est-à-dire la distance atteinte par le projectile dans le plan horizontal de départ ($Z = 0$), vaut :

$$X_M = \frac{v_0^2 \sin(2\theta_0)}{g}$$

et que la hauteur maximale atteinte par le projectile vaut :

$$H_M = \frac{v_0^2 \sin^2(\theta_0)}{2g}$$

- 7/ Donner la valeur de l'angle θ_0 pour laquelle la portée est maximale.

8/ Application numérique

La taille des plombs est identifiée par un numéro allant de 1 à 12 qui correspond à une régression arithmétique des diamètres de 0,25 mm par numéro. Une cartouche de n°8 possède des plombs plus petits qu'une de n°4. Le tableau 1 ci-dessous donne les rayons de quelques types de plombs et certains résultats numériques obtenus en utilisant les formules ci-dessus pour une vitesse initiale $v_0 = 380 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Reporter le tableau 1 sur votre copie en le complétant par des valeurs à deux chiffres significatifs.

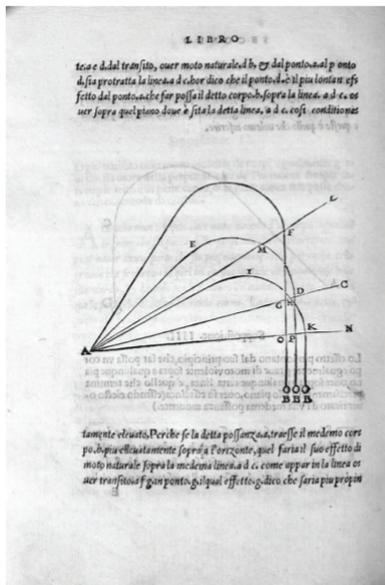
- 9/ Comparer la portée maximale, obtenue pour un angle $\theta_0 = 45^\circ$, à la portée donnée dans le document 1 et conclure. Quel(s) autre(s) facteur(s) montre(nt) qu'il faut abandonner le modèle gravitaire ?

N° du plomb	1	5	10
Rayon (mm)	2,0	1,5	0,875
Masse m (g)	0,38	?	0,031
Portée X_M (km)	?	?	?
Hauteur H_M (km)	?	?	?
v_∞ ($m \cdot s^{-1}$)	33	?	22

TABLE 1

C) Deuxième modèle : trajectoire de Tartaglia

On vient de voir dans l'étude précédente que, pour les plombs de chasse, v_0 est très supérieure à v_∞ . Dans ce cas, la trajectoire diffère considérablement de la trajectoire gravitaire. On distingue 3 phases : une première phase à mouvement rectiligne, une deuxième phase à trajectoire asymétrique autour d'un sommet et une troisième phase de mouvement de chute verticale. Il s'agit d'une « trajectoire de Tartaglia », du nom du mathématicien balisticien Niccolò Tartaglia (XVIe siècle, portrait ci-dessous), qui a décrit les trajectoires (extrait ci-dessous) d'un boulet de canon.



Phase initiale : mouvement rectiligne ascendant

Soit (OX') la direction de la droite trajectoire dans cette phase initiale. On note X' l'abscisse du point M sur cette droite qui fait un angle θ_0 avec (OX) et \vec{v} sa vitesse (figure 2).

- 10/ Montrer que le poids d'un plomb est alors négligeable devant la force de traînée.
- 11/ Montrer que l'équation du mouvement dans la première phase se met sous la forme :

$$\frac{d\vec{v}}{dX'} = -\frac{g}{v_\infty} \vec{v} = \frac{1}{D} \vec{v}$$

- 12/ Quelle est la dimension de D ?
- 13/ Établir l'expression de \vec{v} en fonction de X' .
Que représente le paramètre D ?
- 14/ On note d la distance que doit parcourir le plomb pour atteindre une vitesse $10 v_\infty$, vu la vitesse atteinte quand le plomb a parcouru 40 m et E_c l'énergie cinétique correspondante. Le tableau 2 ci-dessous donne pour trois numéros de plomb des résultats numériques obtenus en utilisant les formules ci-dessus pour une vitesse initiale $v_0 = 380 m \cdot s^{-1}$.
Reporter le tableau 2 sur votre copie en le complétant par des valeurs à deux chiffres significatifs.
- 15/ Comment définiriez-vous la portée utile d'un tir ?

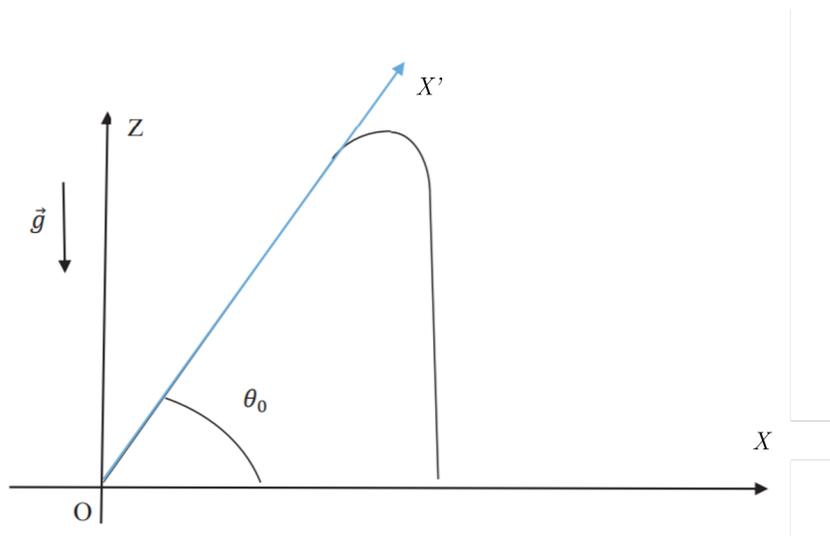


FIGURE 2 : Trajectoire de Tartaglia

N° du plomb	1	5	10
$D(\text{m})$	110	?	50
v_0/v_∞	11	?	17
$d(\text{m})$	275	?	140
$v_u(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	270	?	170
$E_c(\text{J})$	13,5	?	0,45

TABLE 2

On lit dans les journaux de chasse que le caractère mortel du tir vient en première approximation du fait que les plombs qui pénètrent dans le gibier communiquent à l'animal leur énergie cinétique créant ainsi une onde de choc fatale.

16/ En supposant qu'il suffit de 2 plombs numéro 1 pour avoir un canard à son tableau de chasse, de combien de plombs 5 et 10 suffirait-il ?

En déduire l'ordre de grandeur de la portée utile à l'aide de l'évaluation du paramètre D précédemment défini.

17/ Comparer aux valeurs données dans le document 1.

Pourquoi faut-il prendre des billes plus grosses en fer doux, sachant qu'il s'agit d'un acier de masse volumique $\rho' = 7600 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$?

Quel est le danger lié à l'agglutination de la grenaille ?

Troisième et dernière phase : mouvement rectiligne descendant

On note que cette phase est quasiment verticale.

18/ À quoi correspond-t-elle ?

19/ Montrer que la vitesse limite atteinte pendant cette dernière phase vaut :

$$\vec{v}_\infty = \sqrt{\frac{2mg}{\rho\pi R^2 C_D}} (-\vec{k})$$

Expliquer le terme de « mur aérodynamique » utilisé pour qualifier cette dernière phase.

Deuxième phase : la phase intermédiaire

Dans cette phase, la vitesse a diminué.

20/ Pourquoi qualifie-t-on cette phase de « phase gravitaire » ?

On peut établir par un calcul formel, à partir de l'équation du mouvement, l'expression approchée de la portée maximale du projectile pour ce type de trajectoire :

$$X_M \approx \frac{D \cos \theta_0}{2} \ln \left[1 + 4 \left(\frac{v_0}{v_\infty} \right)^2 \sin \theta_0 \right] = H \cotan(\theta_0)$$

- 21/ Évaluer numériquement les portées maximales des numéros 1, 5 et 10 de plombs, pour $\theta_0 = 16^\circ$. Comparer aux valeurs données dans le document 1.

Le même calcul donne également l'expression approchée de l'angle initial permettant d'optimiser la portée maximale X_M :

$$\theta_{\max} \approx \arctan \left(\sqrt{\frac{2\sqrt{2}(v_0/v_\infty)^2}{[1 + 2\sqrt{2}(v_0/v_\infty)^2][\ln(1 + 2\sqrt{2}(v_0/v_\infty)^2)]}} \right)$$

- 22/ La figure 3 donne la courbe θ_{\max} , (en degrés) fonction de $\log(v_0/v_\infty)^2$. Identifier la valeur de θ_{\max} pour les trois numéros de plomb considérés.

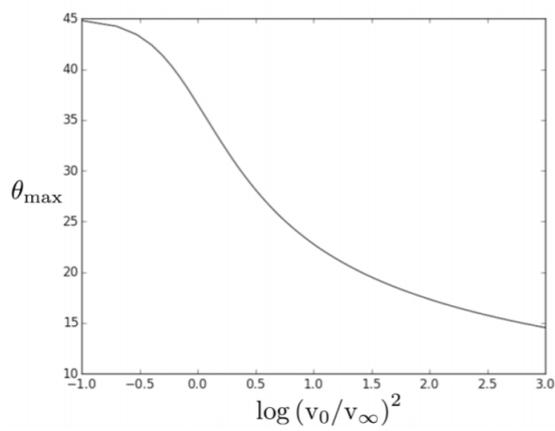


FIGURE 3 : Angle initial optimal

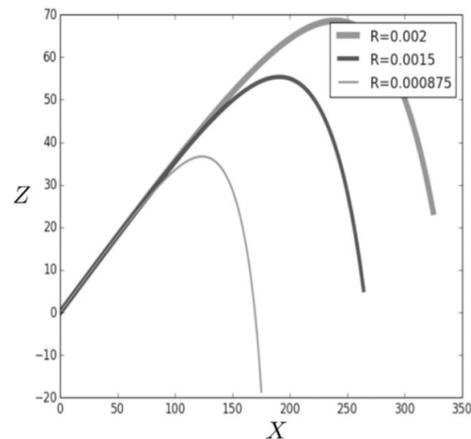


FIGURE 4 : Trajectoires de différents plombs

Pour calculer plus précisément la portée utile du tir de grenaille de plomb, on intègre numériquement l'équation du mouvement.

La figure 4 donne les trajectoires des plombs n°1, 5 et 10 de vitesse initiale $380 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, pour l'angle θ_0 optimisant la portée maximale. Les valeurs des coordonnées et des rayons sont en mètres.

- 23/ Évaluer les portées maximales pour chaque calibre et comparer aux données du document 1.

II - Une balançoire

Un enfant faisant de la balançoire (figure 5) est modélisé par une masse ponctuelle m située en M et suspendue en O par une tige rigide, de masse négligeable et de longueur ℓ . Le champ de pesanteur \vec{g} , de norme g , est supposé uniforme. L'angle que fait la tige de suspension avec la verticale est noté θ (figure 6). Les vecteurs unitaires \vec{u}_r , \vec{u}_θ et $\vec{u}_z = \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta$, tels que définis sur la figure 6, définissent un trièdre orthonormé direct lié à la balançoire.

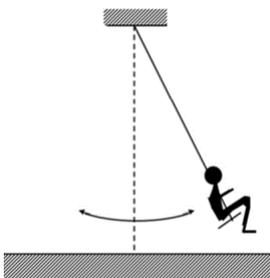


FIGURE 5 : Enfant assis sur sa balançoire

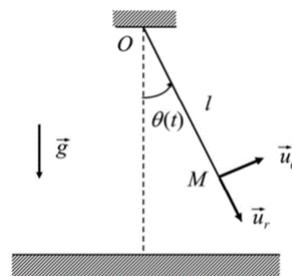


FIGURE 6 : Schématisation de la balançoire et repère mobile associé

- 24/ À quelle condition sur la durée de l'expérience, le référentiel terrestre peut-il être considéré comme galiléen ? On donnera un ordre de grandeur.

Cette condition sera supposée vérifiée dans toute la suite du problème.

- 25/ Dans cette question, tout frottement de la tige sur son axe de rotation et tout frottement dû à la résistance de l'air sont négligés.
- Établir l'équation du mouvement vérifiée par $\theta(t)$ en utilisant la méthode de votre choix.
 - En déduire que le mouvement est plan.
 - À quelle condition l'enfant assis sur la balançoire sera-t-il un oscillateur harmonique ? Donner l'expression littérale de la pulsation propre ω_0 correspondante.

Dans toute la suite du problème, les mouvements de la balançoire et de l'enfant seront étudiés dans le plan vertical de la figure 6.

L'approximation de l'oscillateur harmonique est ici examinée en considérant les effets non linéaires. L'enfant part d'un angle θ_i positif sans vitesse initiale.

- 26/ En partant du théorème de l'énergie cinétique, donner l'expression de $\frac{d\theta}{dt}$ et fonction de θ , θ_i et des paramètres caractéristiques du système. En déduire l'expression de la période $T(\theta_i)$ sous forme d'une intégrale en fonction de θ , θ_i et des paramètres caractéristiques du système. On précisera soigneusement les bornes d'intégration. On ne demande pas de calculer cette intégrale. Retrouver le résultat de la question 25/c dans le cas des petites oscillations.

Une intégration numérique permet de dessiner la courbe représentative de la fonction $T(\theta_0)$ ci-dessous (figure 7). Commenter cette courbe.

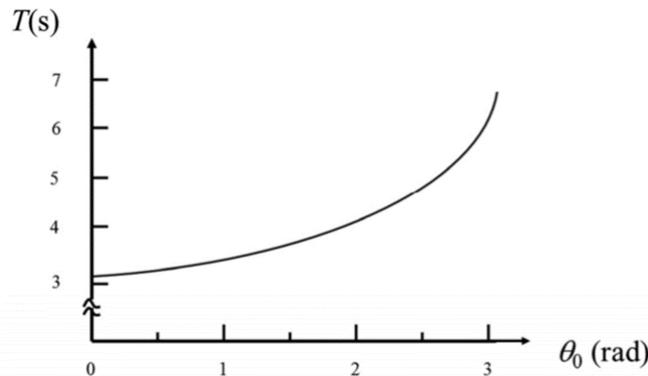


FIGURE 7 : Période en fonction de l'angle de départ

- 27/ Posant $\sin \theta \approx \theta - \theta^3/6$, que devient l'équation différentielle du mouvement vérifiée par θ ? Est-elle linéaire ?
- 28/ On cherche, pour l'équation différentielle approchée écrite à la question précédente, une solution elle-même approchée de la forme :

$$\theta = \theta_i \cos \omega t + \varepsilon \theta_i \cos 3\omega t \text{ où } \varepsilon \ll 1$$

- En se limitant au premier ordre en ε , exprimer en fonction de ω_0 et θ_i la pulsation fondamentale ω ainsi que le terme ε .
 - Par rapport au mouvement harmonique, la courbe $\theta(t)$ relative au mouvement réel a-t-elle une plus grande ou une plus petite période ?
 - Quelle est la pulsation du premier harmonique après le fondamental ?
 - Dans le cas général où on ne se limiterait pas à des développements au premier ordre, quelle serait l'allure du spectre de la solution $\theta(t)$ obtenu par analyse spectrale ?
- 29/ Au point O s'exercent des forces de frottement sur la tige. Le moment de ces forces (par rapport à O) est égal à $-C \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_z$ où C est une constante positive.
- Quelle est la dimension de la constante C ?

- (b) Établir l'équation différentielle à laquelle doit maintenant obéir $\theta(t)$.
- (c) En supposant que l'angle θ reste suffisamment petit, à quelle inégalité doit satisfaire C pour que le mouvement de l'enfant puisse être considéré comme un mouvement oscillatoire dont l'amplitude décroît avec le temps (mouvement pseudo-périodique) ?

30/ Les frottements ont pour conséquence d'amortir le balancement de l'enfant et un deuxième enfant vient donc aider le premier enfant qui se balance à maintenir une amplitude constante en le poussant (figure 8) avec une force horizontale périodique non harmonique dont le module $F(t)$ est représenté à la figure 9.

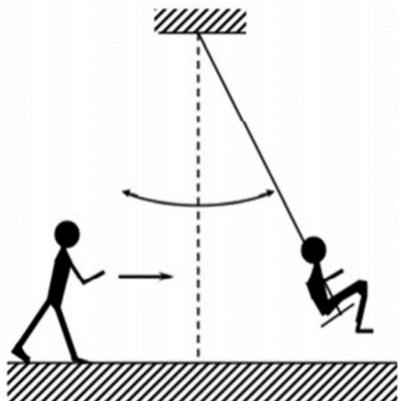


FIGURE 8 : Enfant sur sa balançoire poussé par un autre enfant

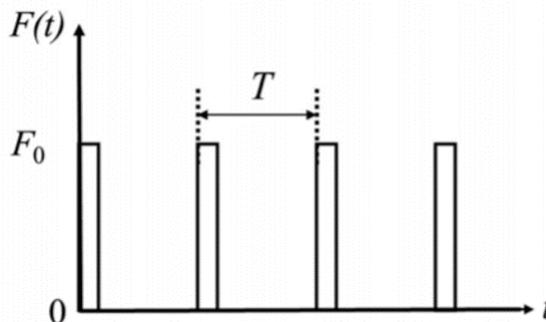


FIGURE 9 : Profil de la force appliquée à l'enfant sur sa balançoire en fonction du temps

- (a) À quel moment et à quelle fréquence l'enfant pousseur doit-il appliquer sa poussée sur l'enfant de la balançoire pour que son action soit la plus efficace possible ? Que vaut donc la période T de la force $F(t)$ pour que l'action de l'enfant pousseur soit la plus efficace possible ? (on supposera les frottements faibles dans cette question et dans les suivantes).
- (b) Représenter sur un même graphe la fonction $F(t)$ de la figure 9 et l'angle $\theta(t)$.
- (c) Déterminer la puissance moyenne dissipée par les frottements en fonction de C , ω la pulsation du mouvement et θ_0 l'amplitude du mouvement. En déduire l'expression du travail fourni par l'enfant pousseur après 20 oscillations de l'enfant se balançant en fonction de C , θ_0 et ω .