Fiche Méthode IV

Traitement des incertitudes sur la mesure

Mesurer une grandeur physique (intensité d'un courant, vitesse d'un véhicule, tension, longueur, ...), consiste à rechercher la valeur de cette grandeur mais aussi lui associer un degré de confiance afin de pouvoir qualifier la qualité de la mesure.
La mesure d'une grandeur physique A peut être : **directe** (pesée pour une masse, mesure d'une distance avec une règle, mesure d'une pression avec un manomètre) ou **indirecte** (concentration, vitesse).

Cette fiche est complétée par le travail mené lors du TP 8 sur l'utilisation de simulations informatiques permettant de faciliter l'estimation de la variabilité d'une mesure.

A Vocabulaire associé à la mesure

La science de la mesure est appelée la métrologie et, comme tout domaine scientifique, un vocabulaire précis doit être utilisé afin que tout le monde puisse se comprendre :

> **Définition**
> **Mesurande :** Grandeur physique que l'on souhaite mesurer.
>
> **Mesure :** Processus permettant d'obtenir expérimentalement une ou plusieurs valeurs que l'on peut raisonnablement attribuer à une grandeur.
>
> **Observation :** Valeur numérique obtenue lors d'une mesure unique. On parle aussi d'**indication**.
>
> **Résultat de mesure :** Ensemble des observations obtenues lors du processus de mesure. Il est généralement complété par des explications sur la manière dont elles ont été obtenues.
>
> **Valeur mesurée :** Meilleure estimation du mesurande.
>
> **Valeur vraie :** Valeur du mesurande que l'on obtiendrait si le mesurage était parfait.

B Variabilité de la mesure

La valeur mesurée n'est jamais rigoureusement égale à la valeur vraie. Le processus de mesure ne permet souvent d'attribuer à la grandeur mesurée qu'un intervalle de valeurs raisonnablement acceptables.
En effet, tout mesurage comporte une **variabilité** liée à plusieurs aspects :

- l'instrument de mesure limite la précision (ex : une règle)
- l'instrument de mesure comporte une part de variabilité (ex : variabilité précisée par le constructeur)
- le protocole de mesure comporte une part de variabilité qui peut être due au matériel utilisé, aux conditions de travail etc (ex : la température varie durant l'expérience, plage de positions d'une lentille pour une image nette)

Afin de pouvoir la traiter mathématiquement, on modélise cette variabilité comme une dispersion aléatoire des valeurs autour de la valeur attribuée à la grandeur mesurée. C'est dans ce cadre qu'on se place pour définir les **incertitudes**.

C Incertitudes

1 Incertitude-type

Soit X un mesurande et x la valeur mesurée de X.

Ne pouvant faire une mesure parfaite, on cherche à donner une estimation de la valeur du mesurande en ajoutant au résultat du mesurage la variabilité évoquée précédemment. On associe donc à ce résultat une **incertitude-type** qui correspond à l'écart-type de la distribution représentant le résultat de la mesure. Elle est notée $u(x)$.

RÉSULTAT D'UNE MESURE

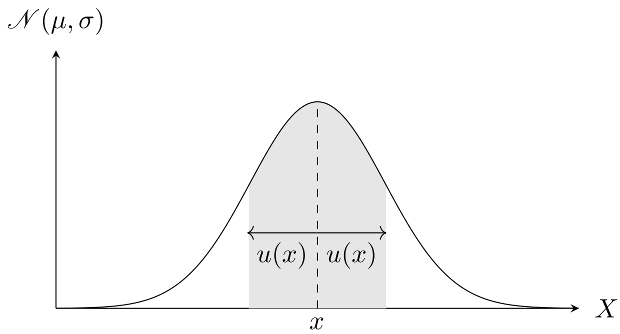
Le résultat d'une mesure s'écrit :

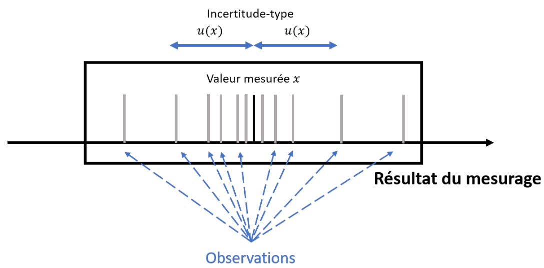
$$X = (x \pm u(x)) \text{ unité}$$

On a ainsi un résultat de mesure à 68% de confiance.

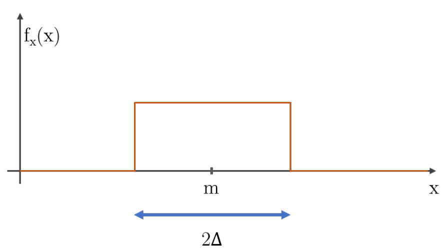
Ici, on fait l'hypothèse que le mesurande X est une variable aléatoire continue dont la densité de probabilité suit une loi normale :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$





2 Estimation de l'incertitude-type $u(x)$ lors d'une mesure directe

Type	**Type A**	**Type B**
Quand ?	N mesures effectuées dans les mêmes conditions expérimentales	Une seule mesure effectuée à l'aide d'un instrument
Valeur de x	La moyenne arithmétique de tous les résultats : $$x = \overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N} x_i$$	Le résultat de la mesure donné par l'instrument ou le protocole.
Incertitude-type $u(x)$	$$u(x) = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$ avec $$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}{N-1}}$$ l'écart-type	Donnée par le constructeur ou déterminée lors de l'expérience. $$u(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$$ avec Δ la demi-largeur de la plage de valeurs • Instrument gradué : $\Delta = \frac{1}{2}$ graduation • Instrument étalonné : Δ est donné par le constructeur • Variabilité de la méthode : Δ est estimé par l'expérimentateur • Si on peut positionner un curseur à $\pm a$ autour d'une position centrale m, la précision est $\Delta = a$: 

3 Calcul de l'incertitude-type $u(g)$ lors d'une mesure indirecte

Considérons un mesurande G dépendant de deux grandeurs X et Y [1]. On leur associe g, x et y les valeurs mesurées associés à chacune de ces grandeurs ainsi que $u(g)$, $u(x)$ et $u(y)$ les incertitudes-types associées à ces résultats.

L'obtention de $u(g)$ se fait par **propagation des incertitudes**. Le résultat prend ainsi compte de l'ensemble des sources de dispersion.

$G(X,Y)$	$X+Y$	$X-Y$	$X\times Y$	$\dfrac{X}{Y}$
$u(g)$	$\sqrt{u(x)^2+u(y)^2}$		$g\times\sqrt{\left[\dfrac{u(x)}{x}\right]^2+\left[\dfrac{u(y)}{y}\right]^2}$	

D Comparaison de deux valeurs : écart normalisé

Lors d'un processus de mesure, on est souvent amené à comparer deux valeurs mesurées afin de valider le protocole réalisé.

1 Comparaison de deux résultats de mesure

Considérons deux valeurs mesurées x_1 et x_2 assorties de leurs incertitudes-types $u(x_1)$ et $u(x_2)$. On définit l'écart normalisé z par :

$$z=\frac{|x_1-x_2|}{\sqrt{u(x_1)^2+u(x_2)^2}}$$

De nombreux domaines scientifiques ont convenu d'un seuil de 2 pour cet écart normalisé :

- Si $z<2$, alors les résultats de mesure sont compatibles,
- Si $z\geq 2$, alors les résultats de mesure sont incompatibles.

2 Comparaison à une valeur de référence

Considérons maintenant le cas où on réalise un protocole donnant une valeur mesurée x assortie de son incertitude-type $u(x)$ qu'on cherche à comparer à une valeur de référence x_{ref}. L'incertitude-type de cette dernière valeur étant négligeable par rapport à l'autre, on peut simplifier l'écart normalisé ainsi :

ÉCART NORMALISÉ POUR UNE VALEUR DE RÉFÉRENCE

$$z=\frac{|x-x_{\text{ref}}|}{u(x)}$$

Le même critère est utilisé, on compare la valeur de z à 2.

3 Que faire si $z\geq 2$?

Si le résultat de mesure n'est pas compatible avec la valeur de référence, plusieurs pistes sont à creuser :

- la manipulation peut être erronée, le calcul de la valeur mesurée ou de son incertitude peuvent l'être également : il faut sonder la démarche menée
- les incertitudes ont pu être sous-estimées notamment en oubliant une source d'incertitude : il faut sonder les paramètres d'influence sur le mesurande

Il est très important de ne pas négliger cette étape. Rien n'est pire que de conclure à une incompatibilité de résultats de mesure sans chercher à en comprendre l'origine et à la résoudre.

1. On peut prendre par exemple $G=R$ la résistance d'un conducteur ohmique qu'on obtient en mesurant $X=U$ et $Y=I$ puis en calculant $R=\dfrac{U}{I}$.