Système linéaires du premier ordre

TD 8

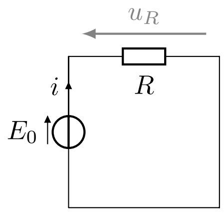
SAVOIR-FAIRE

Savoir-faire 1 - Déterminer un état final SANS l'équation différentielle

Rappel : Régime continu -> Le système a atteint un état d'équilibre, les grandeurs sont constantes.
On utilise alors les dipôles équivalents du condensateur et de la bobine en régime continu.

La bobine est équivalente à un interrupteur fermé en régime continu.

On peut alors donner le circuit équivalent au circuit étudié dans l'exercice :



La loi des mailles donne :

$$E_0 = u_R$$

Or, la loi d'Ohm appliquée à R donne :

$$u_R = Ri$$

Ainsi, on obtient la relation donnant l'intensité en régime continu :

$$\boxed{i = \frac{E_0}{R}}$$

Savoir-faire 2 - Établir une équation différentielle

Notons u_L la tension aux bornes de la bobine et u_R celle aux bornes de la résistance.

La loi des mailles donne :

$$E_0 = u_R(t) + u_L(t)$$

La loi d'Ohm appliquée à R et la loi de la bobine donnent :

$$u_R(t) = Ri(t) \qquad \text{et} \qquad u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

Ainsi, on obtient :

$$E_0 = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt}$$

On reconnaît ici une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants. On la met sous forme canonique :

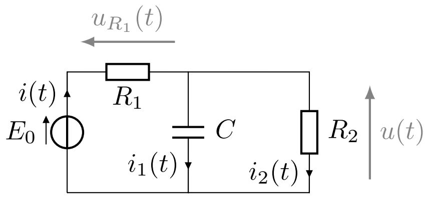
$$\boxed{\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = \frac{E_0}{L}}$$

Posons alors $\tau = \dfrac{L}{R}$ la constante de temps du circuit, ainsi, l'équation devient :

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{i(t)}{\tau} = \frac{E_0}{\tau R}$$

Savoir-faire 2bis - Établir une équation différentielle dans un circuit à deux mailles

Posons i_1 et i_2 les intensités des courants circulant respectivement dans la branche du condensateur et dans celle de la résistance R_2. Notons u_{R_1} la tension aux bornes de la résistance R_1.



La loi des mailles donne :

$$E_0 = u_{R_1}(t) + u(t) \tag{1}$$

Notons ici que E_0 est une constante, on n'y touche donc pas et u est la tension qu'on cherche donc on la garde dans l'équation. Il faut seulement s'occuper de u_{R_1}.

Or, la loi d'Ohm appliquée à R_1 donne :

$$u_{R_1}(t) = R_1 i(t)$$

Ici, R_1 est une constante, il faut donc essayer d'exprimer i en fonction d'autres données qui nous intéressent.

La loi des nœuds appliquée à l'un des deux nœuds principaux donne :

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

La loi d'Ohm appliquée à R_2 et la loi du condensateur permettent d'écrire :

$$u(t) = R_2 i_2(t) \qquad \text{et} \qquad i_1(t) = C\frac{du(t)}{dt}$$

Ainsi, la loi d'Ohm appliquée à R_1 se réécrit comme suit :

$$u_{R_1}(t) = R_1.\left(\frac{u(t)}{R_2} + C\frac{du(t)}{dt}\right)$$

Soit, en injectant dans l'équation (**??**) :

$$E_0 = R_1.\left(\frac{u(t)}{R_2} + C\frac{du(t)}{dt}\right) + u(t)$$

Ce qui donne :

$$E_0 = \frac{R_1}{R_2}u(t) + R_1 C\frac{du(t)}{dt} + u(t)$$

On cherche à obtenir une équation différentielle sous forme canonique, il faut pour cela diviser l'équation précédente par $R_1 C$:

$$\boxed{\frac{du(t)}{dt} + u(t).\left(\frac{1}{R_1 C} + \frac{1}{R_2 C}\right) = \frac{E_0}{R_1 C}}$$

On peut alors poser $\tau = \dfrac{CR_1R_2}{R_1 + R_2}$ et $\tau_1 = R_1 C$ pour mettre l'équation sous la forme :

$$\frac{du(t)}{dt} + \frac{u(t)}{\tau} = \frac{E_0}{\tau_1}$$

Savoir-faire 3 - Résoudre une équation différentielle

Rappelons l'équation différentielle :

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{\tau} = \frac{E_0}{L} \tag{E}$$

Nous cherchons à résoudre cette équation pour $t > 0$.

On cherche tout d'abord les solutions de l'équation homogène (sans second membre) suivante :

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{\tau} = 0 \tag{E_H}$$

Les solutions d'une telle équation sont de la forme $i_H(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ avec A une constante réelle.

Dans un deuxième temps, intéressons-nous aux solutions particulières de l'équation (**??**). Une solution évidente est $i_P(t) = \dfrac{E_0}{R}$.

Les solutions générales de l'équation (**??**) sont alors de la forme

$$i(t) = i_H(t) + i_P(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E_0}{R}$$

Après avoir trouvé l'ensemble des solutions de l'équation différentielle, il nous faut trouver LA solution adaptée à notre circuit et aux conditions initiales données dans l'énoncé, à savoir $i(t) = 0$ pour $t < 0$.

Cela nous amène à écrire que $i(0^-) = 0$ et, comme l'intensité du courant traversant une bobine est continue, on peut affirmer que $i(0^+) = 0$ ainsi : $i(0) = 0$.
On peut alors associer notre situation au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{di(t)}{dt} + \dfrac{i(t)}{\tau} = \dfrac{E_0}{L} \\ i(0) = 0 \end{cases}$$

D'après la forme des solutions générales de (E), on a $i(0) = A + \dfrac{E_0}{R} = 0$.
Ainsi, on peut affirmer que $A = -\dfrac{E_0}{R}$.

On en déduit ainsi la solution du problème de Cauchy, c'est-à-dire l'expression de l'intensité dans le circuit pour $t > 0$:

$$i(t) = \frac{E_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

L'intensité dans le circuit au cours du temps est donc donnée par :

$$\boxed{i(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ \dfrac{E_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) & \text{pour } t > 0 \end{cases}}$$

Savoir-faire 4 - Faire un bilan de puissance

La loi des mailles appliquée au système donne :

$$E_0 = u_R(t) + u_L(t)$$

Multiplions cette équation par l'intensité $i(t)$ dans le circuit :

$$E_0.i(t) = u_R(t).i(t) + u_L(t).i(t)$$

On obtient donc :

$$\mathcal{P}_G = \mathcal{P}_R + \mathcal{P}_L$$

Toute la puissance fournie par le générateur est partagée entre une puissance dissipée par effet Joule par la résistance et une puissance stockée dans la bobine.

On cherche l'énergie fournie par le GBF au cours du temps :

$$\mathscr{E}_G(t) = \int_0^t \frac{d\mathscr{E}_G}{dt'}dt' = \int_0^t E_0.i(t')dt' = \int_0^t E_0.\frac{E_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{t'}{\tau}}\right)dt'$$

On obtient donc :

$$\mathscr{E}_G(t) = \frac{E_0^2}{R}\left[t' + \tau e^{-\frac{t'}{\tau}}\right]_0^t = \frac{E_0^2}{R}\left(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

On remarque que :

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} \mathscr{E}_G(t) = +\infty}$$

L'énergie fournie par le générateur ne cesse d'augmenter au cours du temps et diverge. On peut remarquer, en calculant les énergies reçues par la résistance et la bobine que cette énergie est principalement cédée à la résistance au cours du temps. En effet, l'énergie stockée par la bobine vaudra au maximum : $\mathscr{E}_L = \frac{1}{2} L I_{\max}^2 = \frac{1}{2} L \left(\frac{E_0}{R} \right)^2$