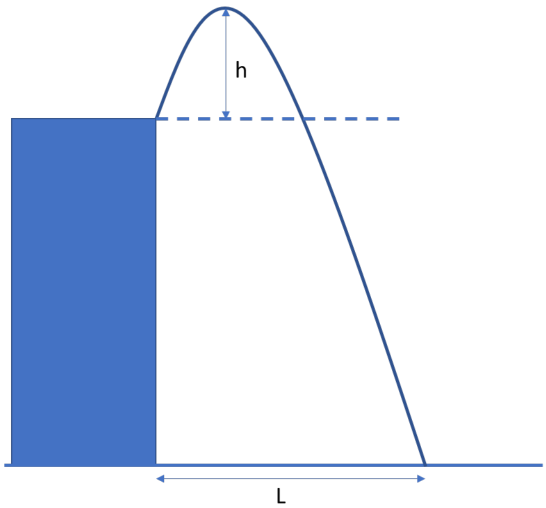
TD 7

Dynamique du point

SAVOIR-FAIRE

Savoir-faire - Savoir mettre en équation le mouvement d'un point dans le champ de pesanteur terrestre

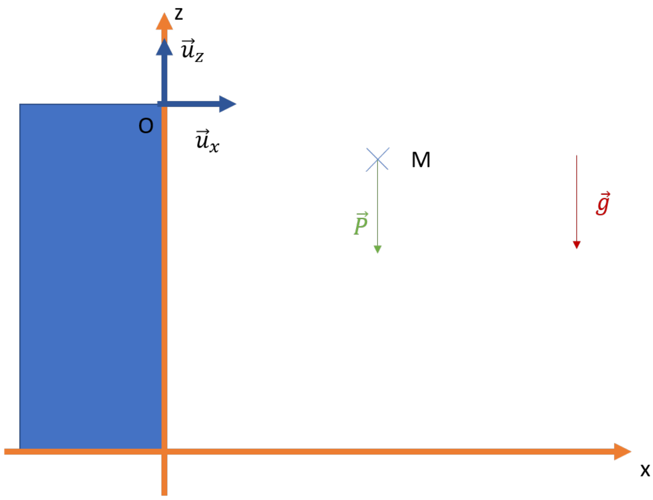
Cet exercice est un jeu autour de la chute libre. Il faut donc bien se représenter le problème et quoi de mieux alors qu'un beau schéma... ?



Rassemblons ce que nous dit l'énoncé et mettons le en forme :

- La balle atteint son altitude max $h = 20$ m
- Au bout de $t_2 = 5$ s, elle a parcouru la distance horizontale de $L = 50$ m

Le système étudié est une balle notée M de masse m. On l'étudie dans le référentiel terrestre associé à l'immeuble supposé galiléen.
On étudie le mouvement de la balle dans le repère cartésien 2D $(O,\vec{u}_x,\vec{u}_z)$ représenté sur le schéma ci-dessous :



La balle n'est soumise qu'à son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$ avec g l'accélération de la pesanteur.
L'étude est faite dans un référentiel galiléen, on applique donc le principe fondamental de la dynamique à la balle qui est de masse constante :

$$m\vec{a} = m\vec{g}$$

avec $\vec{a}$ l'accélération de la balle, dont les coordonnées sont : $\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{z}\vec{u}_z$.

En intégrant deux fois cette expression, on obtient alors :

$$\vec{v} = \vec{g}t + \vec{v}_0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OM} = \vec{g}\frac{t^2}{2} + \vec{v}_0 t$$

Il n'y a pas de condition initiale pour la position car on a placé l'origine au niveau du point de lancer.

Exprimons h et L :

- L'altitude est maximale lorsque la vitesse verticale $\vec{v}.\vec{u}_z$ s'annule. Cela arrive à l'instant t_1, donc $h = z(t_1)$. Notons $v_{0,z} = \vec{v}_0.\vec{u}_z$ la composante verticale de $\vec{v}_0$:

$$\vec{v}(t_1).\vec{u}_z = 0 \Leftrightarrow (\vec{g}t_1 + \vec{v}_0)\,.\vec{u}_z = 0 \Leftrightarrow \vec{g}.\vec{u}_z \times t_1 + \vec{v}_0.\vec{u}_z = 0 \Leftrightarrow t_1 = \frac{v_{0,z}}{g}$$

Ainsi :

$$h = \overrightarrow{OM}(t_1).\vec{u}_z = \left(\vec{g}\frac{t_1^2}{2} + \vec{v}_0 t_1\right).\vec{u}_z = -g\frac{t_1^2}{2} + v_{0,z}t_1 = \frac{v_{0,z}^2}{2g}$$

- La condition sur L est :

$$L = \overrightarrow{OM}(t_2).\vec{u}_x = (\vec{g}\frac{t_2^2}{2} + \vec{v}_0 t_2).\vec{u}_x = \vec{v}_0.\vec{u}_x \times t_2 = v_{0,x}t_2$$

avec $v_{0,x} = \vec{v}.\vec{u}_x$ la composante horizontale de $\vec{v}_0$.

On en déduit donc littéralement :

$$v_0 = \sqrt{v_{0,z}^2 + v_{0,x}^2} = \sqrt{2gh + \left(\frac{L}{t_2}\right)^2}$$

Numériquement, on obtient donc :

$$\boxed{v_0 = 22,2\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}}$$