TD 1

Signaux périodiques

SAVOIR-FAIRE

Savoir-faire 1 - Exploiter l'expression mathématique d'un signal sinusoïdal

1/ Ce signal est sinusoïdal car son expression mathématique est sous la forme d'un terme ne dépendant pas du temps et d'un terme qui est une fonction sinusoïdale du temps.

2/ L'amplitude du signal est le facteur devant le terme sinusoïdal. On peut donc affirmer que l'amplitude de ce signal est $\boxed{S_m = 1,0 \text{ V}}$.

La pulsation du signal est le facteur du temps dans le sinus de l'expression. On peut donc affirmer que la pulsation de ce signal est $\boxed{\omega = 6,28.10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}$.

La période ω et la fréquence f du signal sont liés par la relation :

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

On en déduit donc $\boxed{f = \dfrac{6,28.10^4}{2\pi} = 1,00.10^4 \text{ Hz}}$

La période du signal est l'inverse de la fréquence, donc, numériquement : $\boxed{T = 0,100 \text{ ms}}$.

3/ La valeur moyenne du signal S s'exprime comme suit :

$$< S(t) >= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} S(t)dt = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} S_0 + S_m\sin(\omega t)dt$$

Avec $T = \dfrac{1}{f}$ la période du signal S. Par linéarité de l'intégrale, on obtient :

$$< S(t) >= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} S_0 dt + \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} S_m\sin(\omega t)dt$$

Il vient ainsi :

$$< S(t) >= \frac{1}{T}\left[S_0 t\right]_{t_0}^{t_0+T} + \frac{1}{T}\left[-\frac{S_m}{\omega}\cos(\omega t)\right]_{t_0}^{t_0+T}$$

D'où :

$$< S(t) >= \frac{S_0}{T}(t_0 + T - t_0) - \frac{S_m}{T\omega}(\cos(\omega(t_0+T)) - \cos(\omega t_0))$$

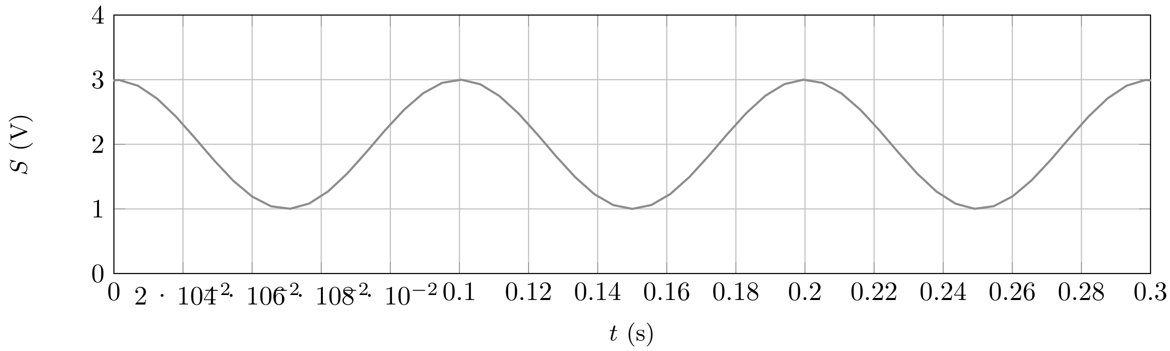
Or, $\omega T = 2\pi$ par définition, donc :

$$< S(t) >= S_0 - \frac{S_m}{2\pi}(\cos(\omega t_0 + 2\pi) - \cos(\omega t_0))$$

Ici, $\cos(\omega t_0 + 2\pi) = \cos(\omega t_0)$, d'où :

$$\boxed{< S(t) >= S_0 = 2,0 \text{ V}}$$

On trace ainsi la représentation suivante du signal S :



Savoir-faire 2 : Exploiter la représentation temporelle d'un signal sinusoïdal

Les caractéristiques des signaux en question sont les suivantes :

- s_a :
  - Amplitude : $3,5$ V
  - Pulsation : 10 périodes en 20 s donc $T_a = 2$ s. On en déduit donc grâce à la formule $\omega_a = \frac{2\pi}{T_a}$:

$$\omega_a = \frac{2\pi}{2} = 3,1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

  - Phase à l'origine : Le signal a une forme temporelle correspondante à un sinus. La phase à l'origine vaut donc $\varphi_a = -\frac{\pi}{2}$ rad

  D'où les expressions mathématiques suivantes :

$$\boxed{s_a(t) = 3,5\cos(3,1.t - \frac{\pi}{2}) = 3,5\sin(3,1.t)}$$

- s_b :
  - Amplitude : 2 V
  - Pulsation : 6 périodes en 4 s donc $T_b = 0,66$ s. On en déduit donc grâce à la formule $\omega_b = \frac{2\pi}{T_b}$:

$$\omega_b = 9,4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

  - Phase à l'origine : Le signal a une forme temporelle correspondante à un cosinus. La phase à l'origine vaut donc $\varphi_b = 0$ rad

  D'où l'expression mathématique suivante :

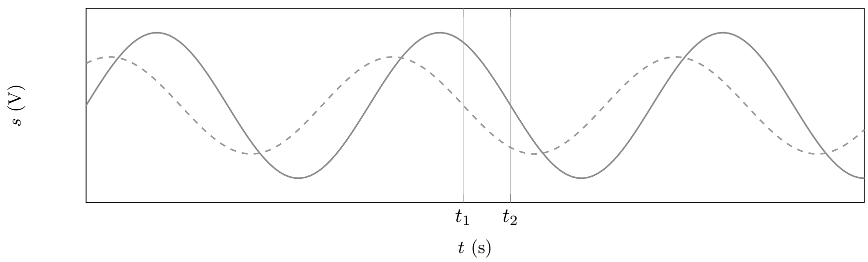
$$\boxed{s_b(t) = 2\cos(9,4.t)}$$

Savoir-faire 3 : Mesurer le déphasage entre deux signaux sinusoïdaux

1/ Nommons s_2 le signal construit en traits pleins et s_1 le signal construit en pointillés.
Les deux signaux sont synchrones, le déphasage entre les deux ne dépend donc pas du temps.

Pour commencer, on mesure la période des deux signaux : $T = 4$ s.

Il faut ensuite mesurer le décalage temporel entre les deux signaux :



On mesure : $\tau = t_2 - t_1 = 0,67$ s.
ATTENTION : On mesure le déphasage de s_2 par rapport à s_1, on prend donc le signal s_1 comme référence. Ici, $\tau > 0$ mais si le signal s_2 s'annulait avant le signal s_1 alors τ serait négatif.

Le déphasage est alors donné par la formule $\Delta\varphi = -2\pi\frac{t_2 - t_1}{T}$.
L'application numérique donne :

$$\boxed{\Delta\varphi = -1,0 \text{ rad} = -\frac{\pi}{3} \text{ rad}}$$

2/ Le déphasage calculé à la question précédente correspond à celui de s_2 par rapport à s_1 et il est négatif. On peut donc affirmer que s_2 est en retard par rapport à s_1.

On peut le confirmer en se rendant compte que s_1 atteint son maximum avant s_2. s_2 est donc bien en retard.

3/ Pour connaître la phase à l'origine d'un signal, il faut mesurer le décalage temporel entre le maximum du signal et l'origine des temps.

Ici, le décalage temporel entre le signal s_2 et l'instant $t = 0$ est nul. La phase à l'origine de s_2 est donc nulle : $\boxed{\varphi_2 = 0 \text{ rad}}$.

D'après le résultat de la question précédente : $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.
On a donc : $\varphi_1 = \varphi_2 - \Delta\varphi$.
Ainsi : $\boxed{\varphi_1 = \dfrac{\pi}{3} \text{ rad}}$ Cela est cohérent car s_1 est en avance par rapport à l'origine des temps.

Savoir-faire 4 : Exploiter le spectre en amplitude d'un signal périodique

1/ Le spectre du signal présente deux pics d'amplitude non nulle. On en déduit donc que le signal est constitué de deux composantes sinusoïdales, il n'est donc pas sinusoïdal.

2/ Soit s le signal associé à ce spectre en amplitude. Posons $f_1 = 1$ kHz et $f_2 = 7$ kHz les fréquences des deux pics observés sur le spectre en amplitude.
La composante sinusoïdale de fréquence f_1 a une amplitude de 3 et la composante sinusoïdale de fréquence f_2 a une amplitude de 1, on peut donc écrire :

$$s(t) = 3\cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t)$$

En remplaçant par les valeurs numériques :

$$\boxed{s(t) = 3\cos(2000\pi t) + \cos(14000\pi t)}$$ [1]

Exercices

Exercice 1 : Caractéristiques de signaux périodiques

On supposera que les amplitudes sont données en V et les durées en s.

1/ Le signal est écrit sous la forme :

$$s_1(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

avec, par identification, $A = 15$ V, $B = -5$ V et $\omega = 2,0.10^3\pi$ rad $\cdot$ s^{-1}.

L'amplitude C d'un tel signal est donnée par $C = \sqrt{A^2 + B^2}$, soit, numériquement : $C = 15,8$ V.

La fréquence f est liée à la pulsation par la relation : $\omega = 2\pi f$, soit, numériquement : $f = 1,0.10^3$ Hz.

Or, la fréquence et la période T sont liées par : $T = \dfrac{1}{f}$. Soit, numériquement : $T = 1,0$ ms.

La phase d'un signal mis sous la forme donnée plus haut est donnée par :

$$\tan\varphi = -\frac{B}{A}$$

Soit, numériquement : $\varphi = 0,32$ rad.

2/ On ne cherche que la fréquence et la période d'un signal somme de signaux sinusoïdaux.
Les fréquences de ces deux signaux sont multiples de 20 Hz ($40 = 2 \times 20$ et $60 = 3 \times 20$) on en déduit donc que le signal est un signal de fréquence 20 Hz dont les seules harmoniques non nulles sont les harmoniques 2 et 3, il n'y a pas de fondamental.

1. Dans cette expression, t est en secondes bien entendu.

3/ Il faut modifier l'expression en utilisant le fait que : $\forall a \in \mathbb{R}$, $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$:

$$s_3(t) = 3\left(\frac{\cos(6\pi t) - 1}{2}\right)$$

On en déduit donc que l'amplitude du signal est de $\frac{3}{2}$ V, sa fréquence de 3 Hz donc sa période de 0,33 s et sa phase initiale est nulle. Ce signal n'est pas pur car il possède une composante continue.

4/ Il faut modifier l'expression en utilisant le fait que : $\forall a \in \mathbb{R}$, $\sin 2a = 2\cos a \sin a$:

$$s_4(t) = 5\sin(10\pi t)$$

D'où une amplitude de 5 V, une fréquence de 5 Hz (période de 0,2 s) et une phase initiale de -$\frac{\pi}{2}$ rad.

Exercice 2 : Produit de signaux sinusoïdaux

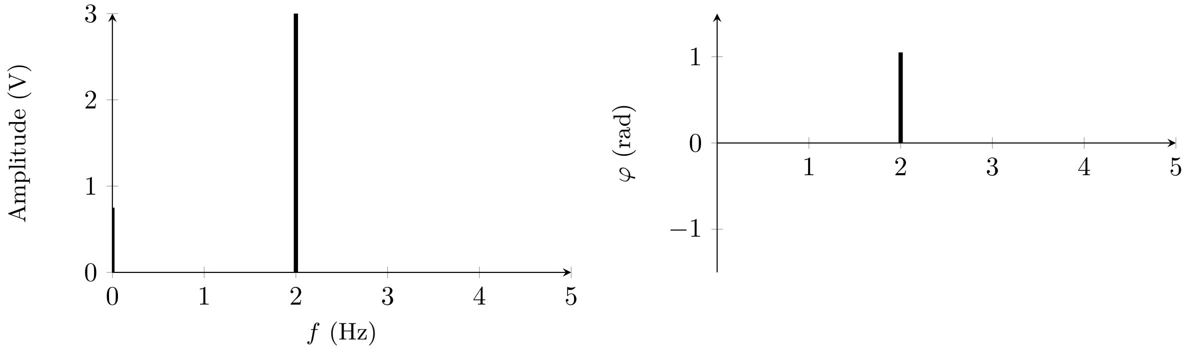
1/ On sait que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$, on en déduit donc que :

$$s(t) = A\cos(2\pi f_1 t)\cos(2\pi f_2 t + \varphi) = \frac{A}{2}(\cos(2\pi(f_1 - f_2)t - \varphi) + \cos(2\pi(f_1 + f_2)t + \varphi)$$

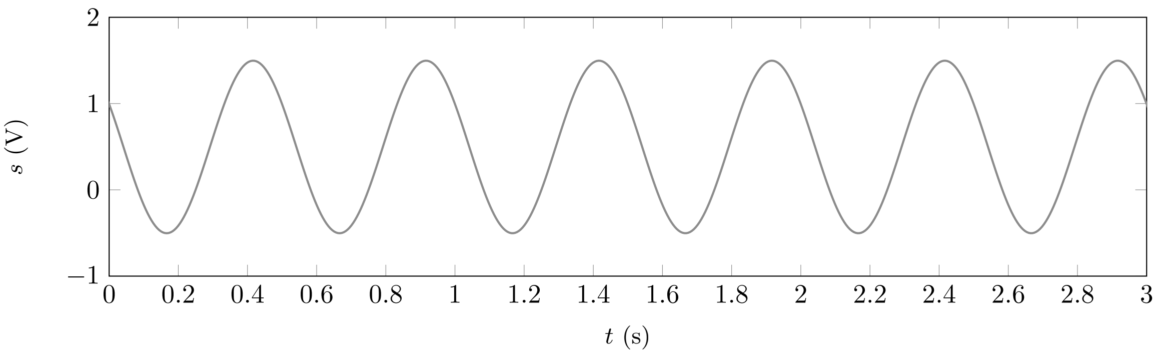
Or, $f_1 = f_2 = f$, donc :

$$s(t) = \frac{A}{2}(\cos\varphi + \cos(4\pi f t + \varphi)) \quad \text{par parité de } \cos$$

2/ On en déduit donc le spectre suivant d'un signal sinusoïdal de composante continue non nulle et de fréquence $2f = 2$ Hz.



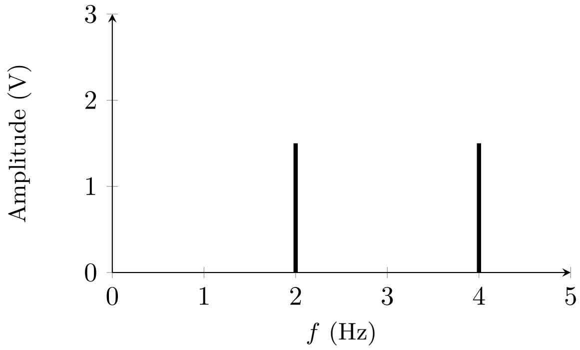
3/ Le signal a donc l'allure suivante :

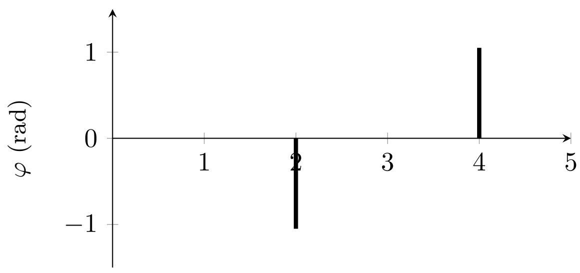


4/ Dans ce cas, l'expression du signal est :

$$s(t) = \frac{A}{2}(\cos(4\pi f t - \varphi) + \cos(8\pi f t + \varphi)) \quad \text{par parité de } \cos$$

Le spectre est alors :





5/ À $t = 0$, le signal n'est pas nul mais vaut $s(0) = A \cos \varphi$. La troisième représentation n'est donc pas la bonne. Il ne vaut pas non plus A, la deuxième représentation est donc celle d'un autre signal.

Par élimination, il ne reste plus que la **première**.