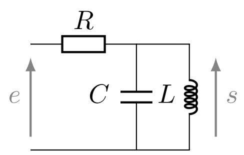
TD 12 — Filtrage linéaire

SAVOIR-FAIRE

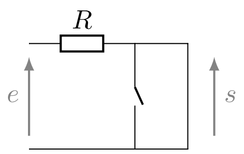
Savoir-faire 1 - Reconnaître qualitativement la nature d'un filtre

Rappelons pour tout l'exercice que :
En basses fréquences : Le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert et la bobine est équivalente à un fil.
En hautes fréquences : Le condensateur est équivalent à un fil et la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert.

1 / Considérons le **premier** filtre :

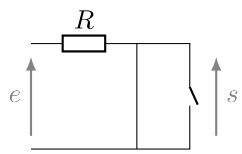


En basses fréquences : le circuit est donc équivalent à :



s est donc la tension aux bornes d'un fil, qui est nulle. Ainsi, $s_{\mathrm{BF}}(t) = 0$.

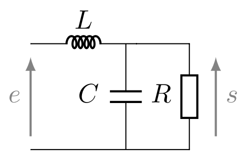
En hautes fréquences : le circuit est donc équivalent à :



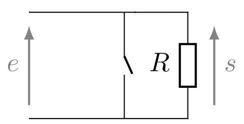
s est donc encore la tension aux bornes d'un fil, qui est nulle. Ainsi, $s_{\mathrm{HF}}(t) = 0$.

⇝ On en déduit donc que le filtre considéré n'est ni un passe-haut, ni un passe-bas. Il pourrait donc être un **passe-bande**.

2 / Considérons le **deuxième** filtre :

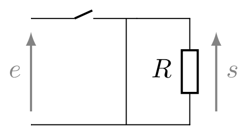


En basses fréquences : le circuit est donc équivalent à :



La loi des mailles dans la grande maille donne alors $s = e$. Le filtre laisse passer le signal en basses fréquences.

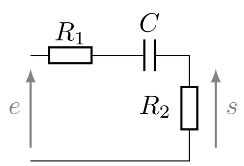
En hautes fréquences : le circuit est donc équivalent à :



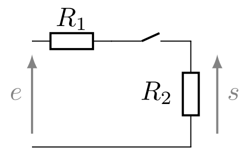
s est donc encore la tension aux bornes d'un fil, qui est nulle. Ainsi, $s_{\mathrm{HF}}(t) = 0$.

⇝ Le signal n'est coupé qu'en hautes fréquences. On en déduit donc que le filtre est **passe-bas**.

3 / Considérons le **troisième** filtre :

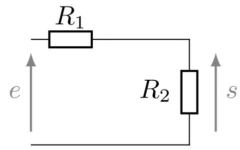


En basses fréquences : le circuit est donc équivalent à :



L'intensité circulant dans le circuit est nulle à cause de la présence d'un interrupteur ouvert. On en déduit d'après la loi d'Ohm que $s = 0$.

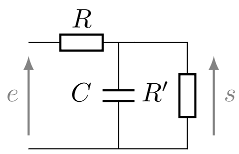
En hautes fréquences : le circuit est donc équivalent à :



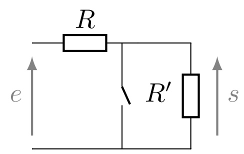
La tension aux bornes de R_2 est donnée par un pont diviseur de tension : $s = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} e$.

$\rightsquigarrow$ Le signal n'est coupé qu'en basses fréquences. Bien que le signal de sortie en hautes fréquences ne soit pas identique à l'entrée mais seulement proportionnel, on peut considérer que ce filtre est **passe-haut**.

4 / Considérons le **quatrième** filtre :

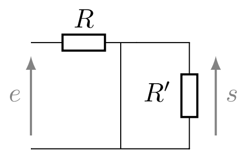


En basses fréquences : le circuit est donc équivalent à :



L'intensité circulant dans le condensateur est nulle car il équivaut à un interrupteur ouvert. On peut alors appliquer le pont diviseur de tension pour obtenir $s = \dfrac{R'}{R + R'} e$.

En hautes fréquences : le circuit est donc équivalent à :

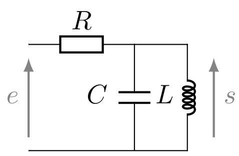


La tension aux bornes d'un fil est nulle, on en déduit donc que $s = 0$.

$\rightsquigarrow$ Le signal n'est coupé qu'en hautes fréquences. Bien que le signal de sortie en basses fréquences ne soit toujours pas identique à l'entrée mais seulement proportionnel, on peut considérer que ce filtre est **passe-haut**.

Savoir-faire 2 - Déterminer une fonction de transfert

1 / Considérons le **premier** filtre :



Le condensateur et la bobine sont placés en parallèle, leurs admittances s'ajoutent donc pour obtenir l'inverse de l'impédance équivalente $\underline{Z}_{\text{éq}}$:

$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{éq}}} = \mathrm{j}\omega C + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L}$$

La tension s est donnée par le pont de diviseur suivant :

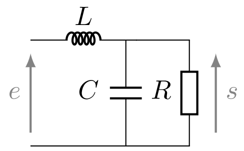
$$\underline{s} = \frac{\underline{Z}_{\text{éq}}}{R + \underline{Z}_{\text{éq}}} \underline{e} = \frac{1}{1 + \dfrac{R}{\underline{Z}_{\text{éq}}}} \underline{e} = \frac{1}{1 + R\left(\mathrm{j}\omega C + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega L}\right)} \underline{e}$$

On reconnaît la forme canonique d'une fonction de transfert d'un filtre passe-bande :

$$\boxed{\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} + \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}}$$

avec $Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$ et $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

2 / Considérons le **deuxième** filtre :



Le condensateur et la résistance sont placés en parallèle, leurs admittances s'ajoutent donc pour obtenir l'inverse de l'impédance équivalente $\underline{Z}_{\text{éq}}$:

$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{éq}}} = \mathrm{j}\omega C + \frac{1}{R}$$

La tension s est donnée par le pont de diviseur suivant :

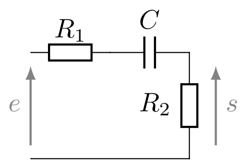
$$\underline{s} = \frac{\underline{Z}_{\text{éq}}}{\mathrm{j}\omega L + \underline{Z}_{\text{éq}}}\underline{e} = \frac{1}{1 + \dfrac{\mathrm{j}\omega L}{\underline{Z}_{\text{éq}}}}\underline{e} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\omega L\left(\mathrm{j}\omega C + \dfrac{1}{R}\right)}\underline{e} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\omega\dfrac{L}{R} - \omega^2 LC}\underline{e}$$

On reconnaît la forme canonique d'une fonction de transfert d'un filtre passe-bas du second ordre :

$$\boxed{\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + \dfrac{\mathrm{j}\omega}{Q\omega_0} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

avec $Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$ et $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

3 / Considérons le **troisième** filtre :



Le condensateur et la résistance R_1 sont placés en série, leurs impédances s'ajoutent donc pour obtenir l'impédance équivalente $\underline{Z}_{\text{éq}}$:

$$\underline{Z}_{\text{éq}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} + R_1$$

La tension s est donnée par le pont de diviseur suivant :

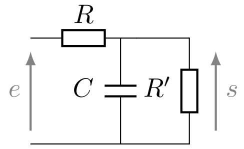
$$\underline{s} = \frac{R_2}{R_2 + \underline{Z}_{\text{éq}}}\underline{e} = \frac{R_2}{R_2 + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C} + R_1}\underline{e} = \frac{\mathrm{j}\omega R_2 C}{1 + \mathrm{j}\omega(R_1 + R_2)C}\underline{e}$$

On reconnaît la forme canonique d'une fonction de transfert d'un filtre passe-haut du premier ordre :

$$\boxed{\underline{H}(\omega) = H_0\frac{\mathrm{j}\omega\tau}{1 + \mathrm{j}\omega\tau}}$$

avec $H_0 = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$ et $\tau = (R_1 + R_2)C$.

4 / Considérons le **quatrième** filtre :



Le condensateur et la résistance R' sont placés en parallèle, leurs admittances s'ajoutent donc pour obtenir l'inverse de l'impédance équivalente $\underline{Z}_{\text{éq}}$:

$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{éq}}} = \text{j}\omega C + \frac{1}{R'}$$

La tension s est donnée par le pont de diviseur suivant :

$$\underline{s} = \frac{\underline{Z}_{\text{éq}}}{R + \underline{Z}_{\text{éq}}}\underline{e} = \frac{1}{1 + \dfrac{R}{\underline{Z}_{\text{éq}}}}\underline{e} = \frac{1}{1 + \dfrac{R}{R'} + \text{j}\omega RC}\underline{e} = \frac{\dfrac{R'}{R+R'}}{1 + \dfrac{\text{j}\omega RR'C}{R+R'}}\underline{e}$$

On reconnaît la forme canonique d'une fonction de transfert d'un filtre passe-bas du premier ordre :

$$\boxed{\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 + \text{j}\omega\tau}}$$

avec $H_0 = \dfrac{R'}{R+R'}$ et $\tau = \dfrac{RR'C}{R+R'}$.

Savoir-faire 3 - Tracer un diagramme de Bode asymptotique

1/ Pour répondre à cette question, il nous faut utiliser la fonction de transfert donnée pour trouver leurs approximations basse et haute fréquence :

$$\underline{H}_{\text{BF}}(\omega) = \text{j}\frac{H_0\omega}{\omega_c} \qquad \text{et} \qquad \underline{H}_{\text{HF}}(\omega) = H_0$$

On obtient le gain en basse et haute fréquence en calculant le module de ces fonctions de transfert équivalentes :

$$G_{\text{BF}}(\omega) = \frac{H_0\omega}{\omega_c} \qquad \text{et} \qquad G_{\text{HF}}(\omega) = H_0$$

Le gain en décibels est obtenu en utilisant le logarithme décimal :

$$G_{\text{dB,BF}}(\omega) = 20\log(G_{\text{BF}}(\omega)) = 20\log\left(\frac{H_0\omega}{\omega_c}\right) = 20\log(H_0) + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

On en déduit donc que la pente de l'asymptote en basse fréquence est de **20 dB/dec**.
et

$$G_{\text{dB,HF}}(\omega) = 20\log(G_{\text{HF}}(\omega)) = 20\log(H_0)$$

On en déduit donc que l'asymptote en haute fréquence est **horizontale**.

On observe également que $G_{\text{dB,BF}}(\omega_0) = G_{\text{dB,HF}}(\omega_0) = 20\log H_0$

2/ Pour tracer le diagramme asymptotique, il nous faut la valeur de H_0. Pour faire cela, on établit la fonction de transfert du circuit, un pont diviseur de tension nous donne :

$$\underline{s} = \frac{\text{j}\omega L}{R + \text{j}\omega L}\underline{e} = \frac{\text{j}\omega\dfrac{L}{R}}{1 + \text{j}\omega\dfrac{L}{R}}\underline{e}$$

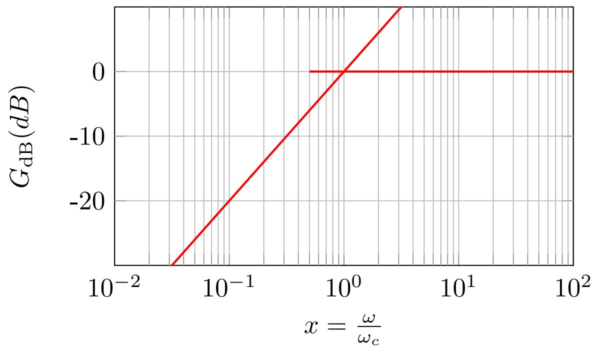
On reconnaît la forme canonique d'un passe-haut du premier ordre :

$$\underline{H}(\omega) = H_0\frac{\dfrac{\text{j}\omega}{\omega_c}}{1 + \dfrac{\text{j}\omega}{\omega_c}}$$

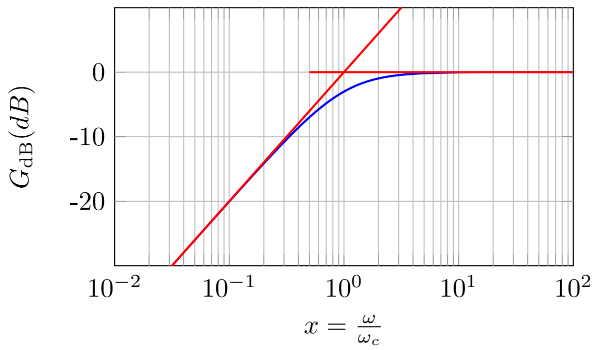
Avec $H_0 = 1$ et $\omega_c = \dfrac{R}{L}$.

On peut alors en déduire que $G_{\text{dB,HF}}(\omega) = 0$ et $G_{\text{dB,BF}}(\omega) = 20\log\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$.

On trace alors le diagramme de Bode en gain suivant :



Le diagramme de Bode réel rejoint les asymptotes en basse et haute fréquences et passe par le point d'abscisse $x = 1$ et d'ordonnée -3 dB.



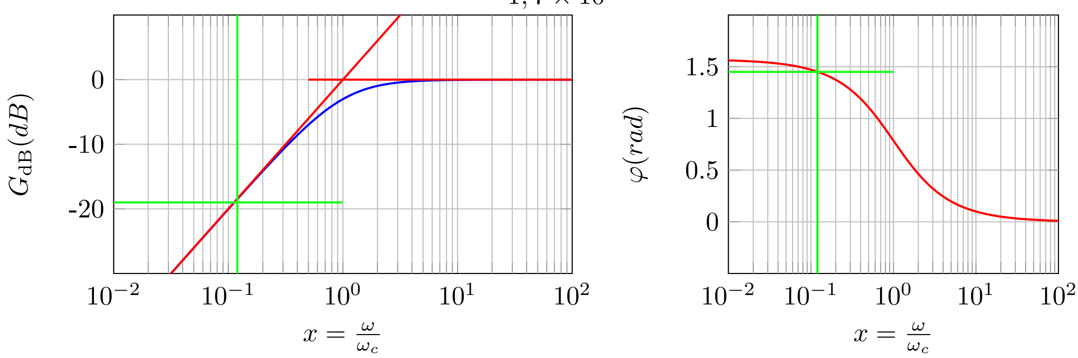
Savoir-faire 4 - Exploiter une fonction de transfert et ses représentations graphiques pour déterminer la réponse d'un filtr

Pour obtenir l'expression de la sortie correspondante à une entrée sinusoïdale de pulsation donnée, il nous faut obtenir la valeur du gain correspondant à la pulsation celle de la phase.

Pour une entrée $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$, on obtient la sortie $s(t) = G(\omega)E_0 \cos(\omega t + \varphi(\omega))$.

Pour pouvoir utiliser les diagrammes de Bode, il nous faut calculer la valeur de $\omega_c = 10^5$ rad/s, soit $f_c = 1,7\times10^4$ Hz.

1/ Le signal d'entrée a l'expression $e(t) = E_0 \cos(2\pi f t)$ avec $E_0 = 4$ V. Utilisons le diagramme de Bode établi au SF précédent à la pulsation réduite $x = \dfrac{2\times10^3}{1,7\times10^4} = 0,12$:



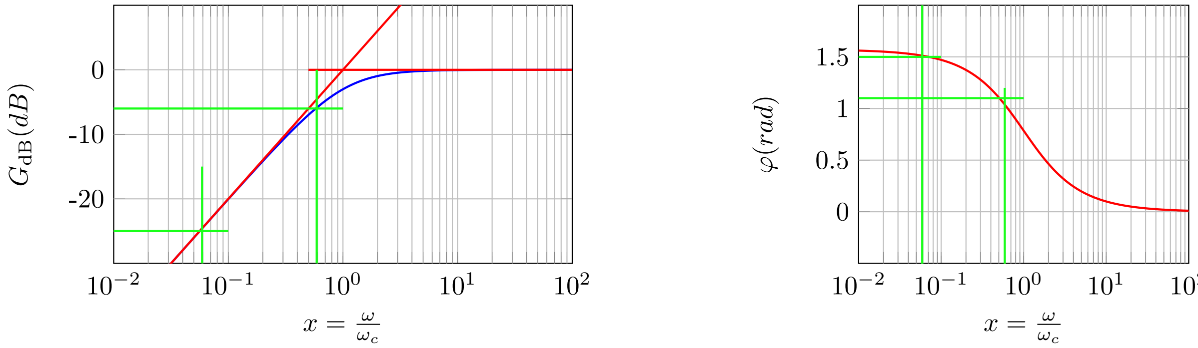
Le gain en décibels à f vaut -19 dB. On en déduit donc que $G(f) = 10^{-\frac{19}{20}} = 0,11$.
De plus, on obtient $\varphi(f) \simeq \dfrac{\pi}{2}$.

On en déduit l'expression de $\boxed{s(t) = 0,11.E_0 \cos(2\pi f t + \frac{\pi}{2}) = -0,11.E_0 \cos(2\pi f t)}$.

2/ Le signal d'entrée a l'expression $e(t) = E_1 + E_0 \cos(2\pi f t)$ avec $E_0 = 4$ V et $E_1 = 1$ V. Le signal d'entrée est la somme du signal d'entrée de la question précédente et d'une composante continue de fréquence nulle par définition. Le filtre dont on étudie l'action étant une filtre passe-haut, cette composante continue est totalement coupée.

On en déduit donc l'expression de $\boxed{s(t) = -0,11.E_0 \cos(2\pi f t)}$ comme pour la question précédente.

3/ Le signal d'entrée a l'expression $e(t) = E_1 [\cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t) + \cos(2\pi f_3 t)]$ avec $E_1 = 1$ V. Pour utiliser le diagramme de Bode, il nous faut trouver les pulsations réduites associées à chaque fréquence : $x_1 = \dfrac{50}{1,7 \times 10^4} = 2,9 \times 10^{-3}$, $x_2 = \dfrac{10^3}{1,7 \times 10^4} = 0,059$ et $x_3 = \dfrac{10 \times 10^3}{1,7 \times 10^4} = 0,59$:



<u>f_1 :</u> La pulsation de plus basse fréquence est coupée par le filtre car de trop basse fréquence.

<u>f_2 :</u> Le gain en décibels associé à la fréquence f_2 vaut -25 dB. On en déduit donc $G(f_2) = 10^{-\frac{25}{20}} = 0,056$.

De plus, on obtient $\varphi(f_2) \simeq \dfrac{\pi}{2}$.

<u>f_3 :</u> Le gain en décibels associé à la fréquence f_3 vaut -6 dB. On en déduit donc $G(f_3) = 10^{-\frac{6}{20}} = 0,5$.

De plus, on obtient $\varphi(f_3) \simeq 1$ rad.

On en déduit l'expression de $\boxed{s(t) = E_0 [0,5.\cos(2\pi f_3 t + 1) - 0,056.\sin(2\pi f_2 t)]}$.

4/ Le signal est de fréquence fondamentale très inférieure à la fréquence de coupure du filtre passe-haut. On en déduit que le signal se situe principalement dans la zone sur laquelle le filtre a un comportement dérivateur.

Le signal triangle d'entrée subissant une dérivation, on en déduit que le signal de sortie est un signal créneau dont l'amplitude est très atténuée.