# Systèmes linéaires en régime sinusoïdal forcé

TD 11

## SAVOIR-FAIRE

### Savoir-faire 1 - Passer d'un signal à sa représentation complexe et inversement

Rappel : Pour identifier un lien entre un signal réel et un signal complexe, il faut mettre le signal réel sous la forme $u(t) = U\cos(\omega t + \varphi)$ ou le signal complexe sous la forme $\underline{u}(t) = Ue^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}$.

**1/** $\underline{U_m} = U_0 e^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}$

**2/** $\underline{I_m} = I\sqrt{2}e^{-\mathrm{j}\psi}$

**3/** $\underline{S_m} = S_m e^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$

**4/** $u(t) = U_m\cos(\omega t - \frac{\pi}{3})$

**5/** $u_1(t) = -\dfrac{U_0}{R}\sin(\omega t)$

**6/** $i(t) = -I_m\cos(\omega t - \frac{\pi}{6})$

### Savoir-faire 2 - Établir des impédances équivalentes

Rappel : La méthode est la même qu'en ARQS.

**1/** La résistance et le condensateur sont en série, leurs impédances s'ajoutent donc. Notons $\underline{Z}_R$ l'impédance de la résistance et $\underline{Z}_C$ celle du condensateur. On a ainsi l'impédance de l'association des deux dipôles :

$$\underline{Z}_{\text{éq}} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_C = R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = \frac{1+\mathrm{j}\omega RC}{\mathrm{j}\omega C}$$

**2/** Le même raisonnement conduit à :

$$\underline{Z}_{\text{éq}} = \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = \mathrm{j}\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = \frac{1-\omega^2 LC}{\mathrm{j}\omega C}$$

**3/** La bobine et le condensateur sont en parallèle, leurs admittances s'ajoutent. Ceci donne la première impédance équivalente :

$$\underline{Z}_{LC} = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_L} + \frac{1}{\underline{Z}_C}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L}} = \frac{\mathrm{j}\omega L}{1+(\mathrm{j}\omega)^2 LC}$$

Cette association est en série avec une résistance, on ajoute donc leurs impédances :

$$\underline{Z}_{\text{éq}} = R + \underline{Z}_{LC} = R + \frac{\mathrm{j}\omega L}{1+(\mathrm{j}\omega)^2 LC} = R\frac{1+\mathrm{j}\omega\frac{L}{R} - \omega^2 LC}{1-\omega^2 LC}$$

**4/** De la même manière qu'à la question précédente, on peut établir l'expression de l'impédance équivalente à l'association de $L$ et $C_2$ et ensuite obtenir l'impédance équivalente au dipôle total :

$$\underline{Z}_{LC_2} = \frac{\mathrm{j}\omega L}{1+(\mathrm{j}\omega)^2 LC_2}$$

Ainsi, on obtient, en sommant avec l'impédance du condensateur de capacité $C_1$ :

$$\underline{Z}_{\text{éq}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_1} + \frac{\mathrm{j}\omega L}{1+(\mathrm{j}\omega)^2 LC_2} = \frac{1-\omega^2 L(C_1+C_2)}{\mathrm{j}\omega C_1(1-\omega^2 LC_2)}$$

**5/** L'association parallèle de la résistance et du condensateur peut être rassemblée sous la résistance équivalente suivante :

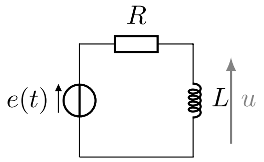
$$\underline{Z}_{RC} = \frac{1}{1/R + \mathrm{j}\omega C} = \frac{R}{1+\mathrm{j}\omega RC}$$

Cette association est en série avec l'autre résistance et l'autre condensateur, on en déduit donc l'impédance équivalente du dipôle :

$$\underline{Z}_{\text{éq}} = R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} + \frac{R}{1+\mathrm{j}\omega RC} = \frac{R(1+\mathrm{j}\omega RC)\mathrm{j}\omega C + 1 + \mathrm{j}\omega RC + \mathrm{j}\omega RC}{\mathrm{j}\omega C(1+\mathrm{j}\omega RC)} = \frac{1+3\mathrm{j}\omega RC - (\omega RC)^2}{\mathrm{j}\omega C(1+\mathrm{j}\omega RC)}$$

### Savoir-faire 3 - Étudier un circuit à l'aide de la représentation complexe

Le circuit étudié est le suivant :




Posons $\underline{e}(t)$ et $\underline{u}(t)$ respectivement les représentations complexes des signaux $e(t)$ et $u(t)$, cela étant justifié par l'entrée sinusoïdale. On les note : $\underline{e}(t) = \underline{E_0}e^{j\omega t}$ et $\underline{u}(t) = \underline{U_0}e^{j\omega t}$.

La tension $\underline{u}$ est donnée par un pont-diviseur de tension :

$$\underline{u}(t) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}}\underline{e}(t) = \frac{1}{1 + j\omega RC}\underline{e}(t)$$

Soit, en exprimant les représentations complexes comme plus-haut :

$$\underline{U_0}e^{j\omega t} = \frac{1}{1 + j\omega RC}\underline{E_0}e^{j\omega t}$$

On en déduit donc :

$$\boxed{\underline{U_0} = \frac{1}{1 + j\omega RC}\underline{E_0}}$$

### Savoir-faire 4 - Reconnaître le type de résonance

Rappel : Pour identifier un type de résonance, il faut revenir à la forme canonique !

**1/** On a : $\underline{u}\left(3 + jRC\omega + \dfrac{1}{j\omega RC}\right) = \underline{e}$

Soit :

$$\underline{u}\left(\frac{1 + 3j\omega RC - (\omega RC)^2}{j\omega RC}\right) = \underline{e}$$

Ainsi :

$$\underline{u} = \frac{j\omega RC}{1 + 3j\omega RC - (\omega RC)^2}\underline{e}$$

On peut poser $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ et $Q = \frac{1}{3}$ pour obtenir une belle forme canonique. On reconnaît une relation correspondante à l'évolution de la tension aux bornes du condensateur dans un circuit RLC série (évolution de l'élongation dans un système masse-ressort).

**2/** On a : $\underline{u} = \dfrac{\underline{e}j\omega RC}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$

Posons $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$. On reconnaît la forme canonique de l'évolution de l'intensité dans un circuit RLC série (évolution de la vitesse dans un système masse-ressort).

**3/** On a : $\underline{x} = \dfrac{\underline{e}}{k + j\alpha\omega - m\omega^2}$

Soit :

$$\underline{x} = \frac{\underline{e}/k}{1 + j\frac{\alpha}{k}\omega - \frac{m}{k}\omega^2}$$

Posons $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et $Q = \dfrac{\sqrt{km}}{\alpha}$. Ainsi, on reconnaît la forme canonique de l'évolution de la tension dans un circuit RLC série (évolution de l'élongation dans un système masse-ressort).

### Savoir-faire 5 - Déterminer les caractéristiques d'un système par lecture graphique

**1/** Pour la résonance en élongation, il faut utiliser le déphasage. En effet, la résonance ne se produit pas à la pulsation propre pour l'amplitude. Toutefois, on sait que pour une pulsation d'excitation égale à la pulsation propre, le déphasage entre l'excitation et l'élongation est égal à $-\frac{\pi}{2}$. On mesure donc : $\boxed{\omega_0 = 22 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}$.

Or, on sait que la résonance en amplitude a lieu pour $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ et on lit que cette valeur vaut : $\omega_r = 18 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.
Isolons $Q$ : $\frac{1}{2Q^2} = 1 - \left(\frac{\omega_r}{\omega_0}\right)^2$, soit :

$$Q = \sqrt{\frac{1/2}{1 - \left(\frac{\omega_r}{\omega_0}\right)^2}}$$

Soit numériquement :

$$\boxed{Q = 1,23}$$

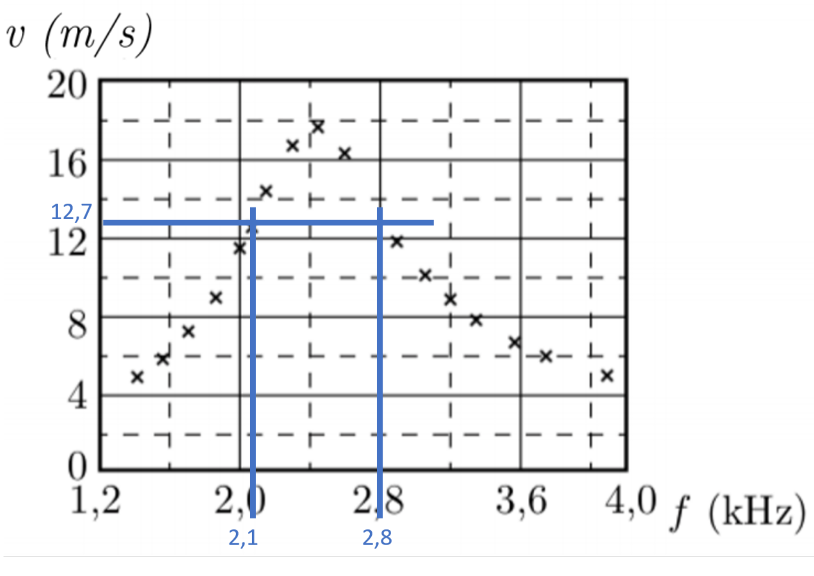
**2/** Ici, il suffit d'utiliser la fréquence de résonance ou bien celle d'annulation du déphasage et on obtient :

$$\boxed{\omega_0 = 2\pi f_0 = 1,5.10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}} \quad \text{avec } f_0 = 2,4 \text{ kHz}$$

Pour obtenir le facteur de qualité, on utilise alors l'acuité de la résonance. On sait que la largeur du pic $\Delta\omega$ est définie par la bande de pulsations sur laquelle la valeur de la vitesse est supérieure à $v_{\max}/\sqrt{2}$ avec $v_{\max}$ la valeur maximale de l'amplitude de la vitesse. Cette largeur vérifie la relation :

$$\Delta\omega = \omega_0/Q \quad \text{soit} \quad \Delta f = f_0/Q$$

On mesure : $v_{\max} = 18 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et on calcule : $v_{\max}/\sqrt{2} = 12,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. On mesure alors une largeur de pic d'environ 0,7 kHz.




On en déduit donc que $\boxed{Q = \frac{2,4}{0,7} = 3,4}$