Régimes transitoires du deuxième ordre

TD 10

SAVOIR-FAIRE

Savoir-faire 1 - Exprimer la force exercée par un ressort

On sait que la force exercée par un ressort est de la forme :

$$\overrightarrow{F}_{\text{res}} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_{\text{ext}}$$

où :

- ℓ est la longueur du ressort
- $\vec{u}_{\text{ext}}$ est le vecteur unitaire dans la direction du ressort et orienté du point d'attache vers le point d'étude

1/ Ici, $\ell = x - x_H = x$ et $\vec{u}_{\text{ext}} = \vec{e}_x$. Donc :

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{\text{res}} = -k(x - \ell_0)\vec{e}_x}$$

2/ Ici, $\ell = x_H - x$ et $\vec{u}_{\text{ext}} = -\vec{e}_x$. Donc :

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{\text{res}} = k(x_H - x - \ell_0)\vec{e}_x}$$

3/ Ici, $\ell = x - x_H$ et $\vec{u}_{\text{ext}} = \vec{e}_x$. Donc :

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{\text{res}} = -k(x - x_H - \ell_0)\vec{e}_x}$$

4/ Ici, $\ell = z_H - z = -z$ et $\vec{u}_{\text{ext}} = -\vec{e}_z$. Donc :

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{\text{res}} = k(-z - \ell_0)\vec{e}_x = -k(z + \ell_0)\vec{e}_x}$$

5/ Ici, $\ell = z - z_H = -z$ et $\vec{u}_{\text{ext}} = \vec{e}_z$. Donc :

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{\text{res}} = -k(z - \ell_0)\vec{e}_x}$$

6/ Dernier cas :

- M_1 est soumis aux actions des deux ressorts $\overrightarrow{F}_g$ et $\overrightarrow{F}_d$ (gauche et droite) :
  - $\underline{\overrightarrow{F}_g}$: $\ell = HM_1 = x_1 - x_H = x_1$ et $\vec{u}_{\text{ext}} = \vec{e}_x$ donc :

    $$\boxed{\overrightarrow{F}_g = -k(x_1 - \ell_0)\vec{e}_x}$$

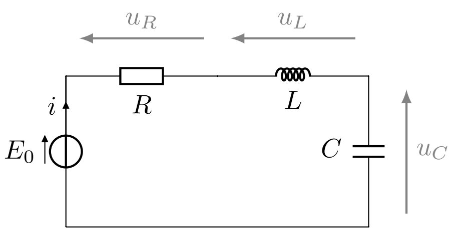
  - $\underline{\overrightarrow{F}_d}$: $\ell = M_2M_1 = x_2 - x_1$ et $\vec{u}_{\text{ext}} = -\vec{e}_x$ donc :

    $$\boxed{\overrightarrow{F}_d = k(X_2 - x_1 - \ell_0)\vec{e}_x}$$

- M_2 est soumis à l'action du ressort de droite $\overrightarrow{F}_{d2}$ uniquement. Ici, $\overrightarrow{F}_{d2} = -\overrightarrow{F}_d$:

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{d2} = -k(X_2 - x_1 - \ell_0)\vec{e}_x}$$

Savoir-faire 2 - Établir l'équation différentielle d'un circuit électrique



La loi des mailles donne pour $t > 0$:
$$E = u_R + u_L + u_C$$
Soit, en appliquant la loi d'Ohm et la loi de la bobine :
$$E = Ri + L\frac{di}{dt} + u_C$$
Soit, d'après la loi du condensateur :
$$E = RC\frac{du_C}{dt} + LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C$$
En mettant cette équation sous forme canonique, on obtient :
$$\frac{E}{LC} = \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{u_C}{LC}$$
Soit, en posant $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$, on obtient :
$$\boxed{\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E}$$

On sait que $i = C\dfrac{du_C}{dt}$. Une dérivation de l'équation différentielle précédente donne alors :
$$\frac{d^3u_C}{dt^3} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{d^2u_C}{dt^2} + \omega_0^2\frac{du_C}{dt} = 0$$
Soit :
$$\boxed{\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0}$$

Savoir-faire 3 - Établir l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique

On étudie le mouvement de la masse M dans le référentiel du laboratoire d'étude qui est supposé galiléen car terrestre. Cette masse est soumise à :
- l'action de son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ avec $\vec{g} = g\vec{e}_z$ ($\vec{e}_z$ le vecteur unitaire directeur de l'axe (Oz)
- l'action du ressort $\vec{F}_{\text{rap}} = -k(l(t) - l_0)\vec{e}_z$
- l'action du fluide $\vec{f} = -\alpha\vec{v}(t)$

On applique donc le principe fondamental de la dynamique au point M :
$$m\vec{a}(t) = \vec{P} + \vec{F}_{\text{rap}} + \vec{f}$$
Le mouvement de la masse étant vertical, on peut considérer que la vitesse est portée par $\vec{e}_z$, on peut donc écrire : $\vec{v}(t) = \dot{l}(t)\vec{e}_z$ car la position du point M par rapport à O est repérée par la longueur du ressort. Même remarque avec l'accélération : $\vec{a}(t) = \ddot{l}(t)\vec{e}_z$:
$$m\ddot{l}(t)\vec{e}_z = m\vec{g} - k(l(t) - l_0)\vec{e}_z - \alpha\dot{l}(t)\vec{e}_z$$
Soit, en projetant sur l'axe (Oz) :
$$m\ddot{l}(t) = mg - k(l(t) - l_0) - \alpha\dot{l}(t)$$
La mise sous forme canonique donne :
$$\ddot{l}(t) + \frac{\alpha}{m}\dot{l}(t) + \frac{k}{m}l(t) = g + \frac{k}{m}l_0$$
En posant $z(t) = l(t) - l_0 - \dfrac{m}{k}g$ soit $z(t) = l(t) - l_{\text{éq}}$, on obtient :
$$\boxed{\ddot{z}(t) + \frac{\alpha}{m}\dot{z}(t) + \frac{k}{m}z(t) = 0}$$
On peut alors écrire cette équation sous la forme :
$$\ddot{z}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = 0$$
En posant $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et $Q = \dfrac{\sqrt{km}}{\alpha}$

Savoir-faire 4 - Résoudre une équation différentielle en fonction de Q

L'énoncé nous propose deux cas.

Premier cas : Masse plongée dans de l'huile

Avant de résoudre l'équation, on cherche à savoir dans quel régime on se trouve, on calcule donc la valeur de Q : $Q = \dfrac{\sqrt{1,0.10^{-3} \times 95}}{0,29} = 1,1$. Ce facteur de qualité est supérieur à $\frac{1}{2}$, le régime est donc **pseudo-périodique**.

Les solutions de l'équation différentielle établie au SF 2 sont donc celles d'une équation homogène et de la forme suivante :

$$z(t) = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \left(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right)$$

avec A et B deux réels à déterminer à l'aide des conditions initiales et $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}$.

Cherchons alors les conditions initiales associées à z :

$$\begin{cases} z(0) = l(0) - l_{\text{éq}} = l_1 \\ \dot{z}(0) = \dot{l}(0) = 0 \qquad \text{(car la vitesse initiale est nulle)} \end{cases}$$

On en déduit donc :

$$\begin{cases} z(0) = A = l_1 \\ \dot{z}(t) = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \left[\Omega(B\cos(\Omega t) - A\sin(\Omega t)) - \dfrac{\omega_0}{2Q}(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t))\right] \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} z(0) = A = l_1 \\ \dot{z}(0) = \Omega B - \dfrac{\omega_0}{2Q}A = 0 \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} A = l_1 \\ B = \dfrac{\omega_0}{2Q\Omega} l_1 \end{cases}$$

On en déduit donc l'expression de z :

$$\boxed{z(t) = l_1 \left(\cos(\Omega t) + \frac{\omega_0}{2Q\Omega}\sin(\Omega t)\right) e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}}$$

Deuxième cas : Masse plongée dans du shampooing

Calculons la valeur de Q : $Q = \dfrac{\sqrt{1,0.10^{-3} \times 95}}{1,0} = 0,31$. Ce facteur de qualité est inférieur à $\frac{1}{2}$, le régime est donc **apériodique**.

Les solutions de l'équation différentielle établie au SF 2 sont donc de la forme suivante :

$$z(t) = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \left(Ae^{\Omega t} + Be^{-\Omega t}\right)$$

avec A et B deux réels à déterminer à l'aide des conditions initiales et $\Omega = \omega_0\sqrt{\dfrac{1}{4Q^2} - 1}$.

Les conditions initiales vérifiées par z donnent donc :

$$\begin{cases} z(0) = A + B = l_1 \\ \dot{z}(t) = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \left[\Omega(Ae^{\Omega t} - Be^{-\Omega t}) - \dfrac{\omega_0}{2Q}(Ae^{\Omega t} + Be^{-\Omega t})\right] \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} A + B = l_1 \\ \dot{z}(0) = \Omega(A - B) - \dfrac{\omega_0}{2Q}(A + B) = 0 \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} A + B = l_1 \\ A - B = \dfrac{\omega_0}{2Q\Omega} l_1 \end{cases}$$

En ajoutant les deux équations puis en soustrayant la deuxième à la première, on obtient :

$$\begin{cases} A = \dfrac{l_1}{2}\left(1 + \dfrac{\omega_0}{2Q\Omega}\right) \\ B = \dfrac{l_1}{2}\left(1 - \dfrac{\omega_0}{2Q\Omega}\right) \end{cases}$$

On en déduit donc l'expression de z :

$$\boxed{z(t) = \frac{l_1}{2}\left[\left(1 + \frac{\omega_0}{2Q\Omega}\right)e^{\Omega t} + \left(1 - \frac{\omega_0}{2Q\Omega}\right)e^{-\Omega t}\right]e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}}$$