Fondements de l'induction

TD 33

SAVOIR-FAIRE

Savoir-faire 2 - Établir le système d'équations couplées de deux circuits couplés par mutuelle

1/ Pour répondre à cette question, on suit la méthode du cours.

1 - L'orientation est déjà donnée sur le schéma de l'énoncé.
2 et 3 - Les deux bobines étant en interaction mutuelle, le flux total à travers la bobine i $\Phi_{tot\to i}$ est dû à la somme du flux propre de cette bobine $\Phi_{i\to i}$ et du flux du champ créé par l'autre bobine $\Phi_{j\to i}$:

$$\Phi_{tot\to 1} = \Phi_{1\to 1} + \Phi_{2\to 1} = L_1 i_1 + M i_2 \quad \text{et} \quad \Phi_{tot\to 2} = \Phi_{2\to 2} + \Phi_{1\to 2} = L_2 i_2 + M i_1$$

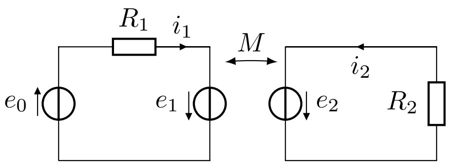
4 - La loi de Faraday donne la force électromotrice d'un générateur modélisant la bobine. En notant e_1 et e_2 les forces électromotrices associées à la bobine 1 et à la bobine 2, on obtient :

$$e_1 = \frac{\mathrm{d}\Phi_{tot\to 1}}{\mathrm{d}t} = -L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \quad \text{et} \quad e_2 = \frac{\mathrm{d}\Phi_{tot\to 2}}{\mathrm{d}t} = -L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

Attention, ces forces électromotrices correspondent aux tensions aux bornes des bobines en convention générateur. On a donc, en convention RÉCÉPTEUR :

$$\boxed{u_{L_1} = L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}} \quad \text{et} \quad \boxed{u_{L_2} = L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}}$$

2/ 5 - On peut établir le circuit électrique équivalent suivant :



6 - La loi des mailles et la loi d'Ohm donnent, dans les deux circuits :

$$\begin{cases} e_0 + e_1 = R_1 i_1 \\ e_2 = R_2 i_2 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \boxed{\begin{cases} e_0 = R_1 i_1 + L_1\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ 0 = R_2 i_2 + L_2\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \end{cases}}$$

3/ En RSF, on peut définir les grandeurs complexes $\underline{e}_0$, $\underline{i}_1$ et $\underline{i}_2$ de sorte que les équations couplées deviennent :

$$\begin{cases} \underline{e}_0 = R_1\underline{i}_1 + L_1\mathrm{j}\omega\underline{i}_1 + M\mathrm{j}\omega\underline{i}_2 \\ 0 = R_2\underline{i}_2 + L_2\mathrm{j}\omega\underline{i}_2 + M\mathrm{j}\omega\underline{i}_1 \end{cases}$$

On cherche $\underline{Z}_{L_1}$ l'impédance apparente de la bobine L_1 soit :

$$\underline{Z}_{L_1} = \frac{\underline{u}_{L_1}}{\underline{i}_1}$$

Or, on a établi en première question que : $\underline{u}_{L_1} = L_1\mathrm{j}\omega\underline{i}_1 + M\mathrm{j}\omega\underline{i}_2$.
De plus, d'après la deuxième équation donnée dans le système ci-dessus :

$$0 = R_2\underline{i}_2 + L_2\mathrm{j}\omega\underline{i}_2 + M\mathrm{j}\omega\underline{i}_1 \quad \text{soit} \quad \underline{i}_2 = -\frac{\mathrm{j}\omega M}{R_2 + \mathrm{j}\omega L_2}\underline{i}_1$$

On réinjecte ainsi dans l'expression de $\underline{u}_{L_1}$:

$$\underline{u}_{L_1} = L_1\mathrm{j}\omega\underline{i}_1 + M\mathrm{j}\omega\frac{-\mathrm{j}\omega M}{R_2 + \mathrm{j}\omega L_2}\underline{i}_1 = \left(\mathrm{j}\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + \mathrm{j}\omega L_2}\right)\underline{i}_1$$

Ainsi :

$$\boxed{\underline{Z}_{L_1} = \mathrm{j}\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + \mathrm{j}\omega L_2}}$$