Mouvements dans un champ de force centrale conservative

TD 21

SAVOIR-FAIRE

Savoir-faire 1 - Montrer que tout mouvement à force centrale est plan

On considère la Lune, de masse m_L et de centre O_L, dans le référentiel géocentrique supposé galiléen.
La Lune est soumise à la force gravitationnelle exercée par la Terre de centre O_T et de masse M_T :

$$\vec{F} = -\mathscr{G}\frac{m_L M_T}{O_L O_T^2}\vec{u}_{TL} \qquad \text{avec } \vec{u}_{TL} \text{ le vecteur unitaire colinéaire à } \overrightarrow{O_T O_L}$$

On applique le théorème du moment cinétique :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathscr{L}_{O_T}}(O_L)}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathscr{M}_{O_T}}(\vec{F}) = \overrightarrow{O_T O_L} \wedge \vec{F} = \vec{0} \qquad \text{car } \vec{F} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{O_T O_L}$$

Donc : $\overrightarrow{\mathscr{L}_{O_T}}(O_L) = \overrightarrow{cste}$

En particulier $\overrightarrow{\mathscr{L}_{O_T}}(O_L)$ a une direction constante. Le mouvement est donc plan (orthogonal à $\overrightarrow{\mathscr{L}_{O_T}}(O_L)$ et contenant O_T).

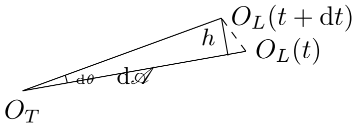
Savoir-faire 2 - Établir la conservation de la constante des aires

Grâce au SF1, on a $\overrightarrow{\mathscr{L}_{O_T}}(O_L) = \overrightarrow{cste}$.

Le mouvement est plan, donc on se place dans une repère polaire de centre O_T.
Dans ce repère, on a $\overrightarrow{O_T O_L} = r\vec{u}_r$ et $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ donc $\overrightarrow{\mathscr{L}_{O_T}}(O_L) = \overrightarrow{O_T O_L} \wedge m\vec{v} = r\vec{u}_r \wedge \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$.

Soit, $\overrightarrow{\mathscr{L}_{O_T}}(O_L) = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z$.
Ce vecteur étant constant, sa norme l'est également. Donc, $mr^2\dot{\theta} = cste$, or, m est constant, donc $r^2\dot{\theta} = cste' = C$ (constante des aires).

Calculons l'aire parcourue pendant 1 jour :



$$\mathscr{A} = \int_{EI}^{EF} \mathrm{d}\mathscr{A} = \int_{EI}^{EF} \frac{1}{2} r \times r\mathrm{d}\theta = \int_{EI}^{EF} \frac{1}{2}\underbrace{r^2\mathrm{d}\theta}_{C\times \mathrm{d}t}$$

$$\mathscr{A} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}C\mathrm{d}t = \frac{C\Delta t}{2} \text{ avec } \Delta t = t_2 - t_1 = 1 \text{ jour.}$$

Ainsi, $\boxed{\mathscr{A}_{1\text{ jour}} = \frac{1}{2}C \times \Delta t_{1\text{ jour}}}$. Cette expression est constante, elle ne dépend pas de l'instant du jour auquel on la calcule.

Savoir-faire 3 - Établir l'expression de l'énergie potentielle effective

L'énergie mécanique de la Lune est constante (car elle n'est soumise qu'à une force conservative) :

$$\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_c + \mathscr{E}_p = \frac{1}{2}mv^2 - \mathscr{G}\frac{m_L M_T}{r}$$

Or, $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}u_\theta$, soit $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$, ainsi :

$$\mathscr{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - \mathscr{G}\frac{m_L M_T}{r}$$

De plus, on sait que $C = r^2\dot{\theta}$ donc $r^2\dot{\theta}^2 = C \times \dot{\theta} = \frac{C^2}{r^2}$. Ainsi :

$$\mathscr{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \mathscr{G}\frac{m_L M_T}{r}}_{\mathscr{E}_{\mathrm{p,eff}}(r)}$$

Pour la Lune, $\mathscr{E}_m < 0$ car elle est dans un état lié. De même $\mathscr{E}_{\mathrm{p,eff}}$.

Savoir-faire Déterminer les vitesses cosmiques

1/ On cherche à faire passer un satellite en orbite autour de la Terre, il faut donc lui conférer la vitesse nécessaire pour que son mouvement soit circulaire de rayon R_T le rayon de la Terre.

Le mouvement étant circulaire, la constante des aires $C = R^2\dot{\theta}$ =cste nous permet de conclure que le mouvement est uniforme : $\dot{\theta}$ =cste.

L'application du principe fondamental de la dynamique au satellite donne donc :

$$m\frac{v^2}{R}\vec{e_r} = -\frac{GM_Tm}{R^2}\vec{e_r}$$

Ici, $\vec{e_r}$ est le vecteur de direction la verticale du satellite et orienté du centre de la Terre vers celui-ci, $R = R_T$, M_T est la masse de la Terre, m est la masse du satellite.

En projetant sur $\vec{e_r}$, on obtient :

$$\boxed{v = \frac{GM_T}{R_T}}$$

2/ Notons v la vitesse conférée au satellite.
On cherche la vitesse à partir de laquelle le satellite est envoyé à l'infini. On part pour cela d'une orbite de rayon R_T parcourue à la vitesse v pour atteindre une distance infinie.

Le cas limite est atteint dans le cas où l'énergie mécanique est nulle : la trajectoire est donc une parabole, le satellite est dans un état de diffusion.

Cette condition donne donc :

$$E_{c,i} + E_{p,i} = E_{c,f} + E_{p,f} = 0$$

À l'état final, l'énergie potentielle est nulle ($-GM_Tm/r$ avec r tendant vers l'infini), l'énergie cinétique l'est donc aussi.

On en déduit donc :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_Tm}{R_T} = 0$$

Ainsi :

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}}$$