Moment cinétique d'un système matériel
TD 20

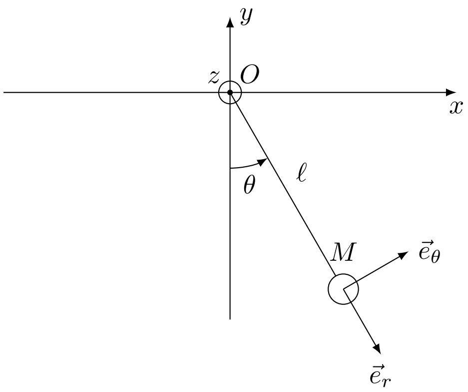
SAVOIR-FAIRE

Savoir-faire 1 - Savoir calculer le moment cinétique d'un point

Le moment cinétique du point M par rapport au point O $\overrightarrow{\mathscr{L}_O}(M)$ est donné par :

$$\overrightarrow{\mathscr{L}_O}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}(M) \qquad \text{avec} \quad \vec{p}(M) \text{le vecteur quantité de mouvement du point } M$$

Faisons un petit schéma dans lequel on place le repère cartésien $(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ et le repère cylindrique associé à M $(O,\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z)$:



Le mouvement est circulaire, la vitesse du point M est donc donnée par $\vec{M} = \ell\dot{\theta}\vec{e}_\theta$. De plus, $\overrightarrow{OM} = \ell\vec{e}_r$. On obtient donc :

$$\overrightarrow{\mathscr{L}_O}(M) = \ell\vec{e}_r \wedge m\ell\dot{\theta}\vec{e}_\theta = m\ell^2\dot{\theta}\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = m\ell^2\dot{\theta}\vec{e}_z$$

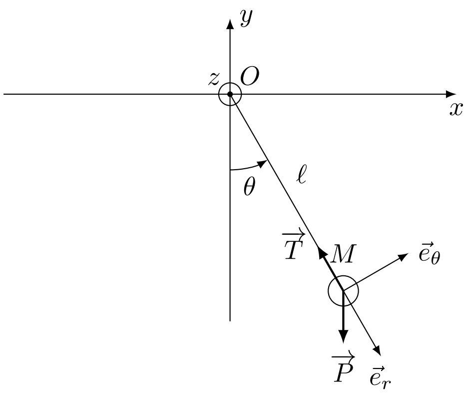
Par définition, le moment cinétique du point M par rapport à son axe de rotation (O_z) est donné par :

$$\boxed{\mathscr{L}_{(O_z)}(M) = \overrightarrow{\mathscr{L}_O}(M).\vec{e}_z = m\ell^2\dot{\theta}}$$

Savoir-faire 2 - Savoir calculer le moment d'une force

Commençons par un bilan des forces appuyé sur le schéma précédent !

- Poids : $\overrightarrow{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_y$
- Tension du fil : $\overrightarrow{T} = -T\vec{e}_r$



Les moments de ces forces par rapport à O est donné par :

- $\overrightarrow{\mathscr{M}_O}(\overrightarrow{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{P} = \ell\vec{e}_r \wedge (-mg)\vec{e}_y$
- $\overrightarrow{\mathscr{M}_O}(\overrightarrow{T}) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{T} = \ell\vec{e}_r \wedge (-T)\vec{e}_r = \vec{0}$

Il nous faut donc faire cette désormais classique projection de $\vec{e}_y$ sur $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$, ce qui donne :

$$\vec{e}_y = -\cos\theta\vec{e}_r + \sin\theta\vec{e}_\theta$$

Ainsi :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathscr{M}_O}(\overrightarrow{P}) = -mg\ell\sin\theta\vec{e}_z} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\overrightarrow{\mathscr{M}_O}(\overrightarrow{T}) = \vec{0}}$$

Pour obtenir les moments de ces forces par rapport à l'axe de rotation du pendule, il suffit de projeter sur cet axe !

$$\boxed{\mathscr{M}_{(O_z)}(\overrightarrow{P}) = -mg\ell\sin\theta} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\mathscr{M}_{(O_z)}(\overrightarrow{T}) = 0}$$

Savoir-faire 3 - Appliquer le théorème du moment cinétique

On est dans un référentiel galiléen, on peut donc appliquer le théorème du moment cinétique au point M par rapport à l'axe (O_z) :

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{L}_{(O_z)}(M)}{\mathrm{d}t} = \mathscr{M}_{(O_z)}(\overrightarrow{P}) + \mathscr{M}_{(O_z)}(\overrightarrow{T})$$

Soit, d'après les résultats des questions précédentes :

$$\frac{\mathrm{d}\ell^2\dot{\theta}}{\mathrm{d}t} = -mg\ell\sin\theta + 0$$

On obtient ainsi l'équation du mouvement du pendule qu'on commence à connaître :

$$\boxed{\ell\ddot{\theta} + mg\sin\theta = 0}$$

Savoir-faire 4 - Appliquer le TMC à un solide

Le système étudié est le pendule pesant étudié dans un référentiel terrestre, celui du laboratoire. On le considère galiléen.

Les actions subies par le pendule pesant sont :

- L'action de la pesanteur appliquée en G.
- L'action de la liaison pivot appliquée en O.

Le moment selon (O_z) de l'action de la liaison pivot est nul par définition. Intéressons nous alors à l'action de la pesanteur.
Elle est modélisée par une force appelée le poids et le moment de cette action par rapport à l'axe (O_z) correspond au moment du poids subi par un pendule simple de longueur d. Soit, d'après les SF précédents :

$$\mathscr{M}_{(O_z)}(\overrightarrow{P}) = -mgd\sin\theta$$

Le moment cinétique du pendule par rapport à cet axe est donné par $\mathscr{L}_{(O_z)} = J\dot{\theta}$.

Nous étant placés dans un référentiel d'étude galiléen, on peut appliquer le théorème du moment cinétique au pendule :

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{L}_{(O_z)}}{\mathrm{d}t} = \mathscr{M}_{(O_z)}(\overrightarrow{P})$$

On obtient ainsi l'équation du mouvement suivante :

$$\boxed{J\ddot{\theta} + mgd\sin\theta = 0}$$

Savoir-faire 5 - Raisonner avec les énergies

L'énergie cinétique du pendule est donnée par : $\mathscr{E}_c = \dfrac{1}{2}J\dot{\theta}^2$.

La puissance de l'action de pesanteur (la seule travaillant) est : $\mathscr{P}(\overrightarrow{P}) = \mathscr{M}_{(O_z)}(\overrightarrow{P}).\dot{\theta}$.

Le pendule pesant est étudié dans un référentiel galiléen, on peut donc lui appliquer le théorème de l'énergie cinétique sous forme différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_c}{\mathrm{d}t} = \mathscr{P}(\overrightarrow{P})$$

On obtient ainsi :

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2\right)}{\mathrm{d}t} = -mgd\sin\theta.\dot{\theta}$$

D'où :

$$\frac{1}{2}J2\dot{\theta}\ddot{\theta} = -mgd\sin\theta.\dot{\theta}$$

On obtient donc bien l'équation du mouvement précédente :

$$\boxed{J\ddot{\theta} + mgd\sin\theta = 0}$$