Aspects énergétiques du mouvement d'un point matériel

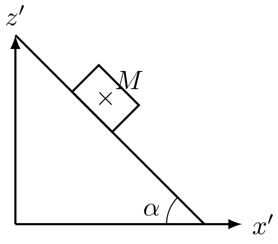
TD 14

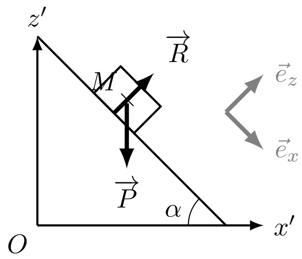
SAVOIR-FAIRE

Savoir-faire 1- Savoir utiliser le théorème de l'énergie cinétique et choisir la bonne forme

Le système auquel on s'intéresse est le palet qu'on étudie dans un référentiel terrestre supposé galiléen. Au vu de la trajectoire rectiligne, on choisit alors le repère cartésien pour étudier le mouvement, mais pas n'importe quel repère cartésien ! En effet, on va choisir un repère tourné de 45° afin de suivre le mouvement du palet selon une seule direction du repère.

Faisons un schéma :

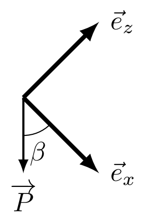




Le bilan des forces appliquées au palet donne :

- le poids du palet : $\vec{P} = m\vec{g}$
- la réaction normale du support (la réaction tangentielle est nulle car on néglige les frottements) : $\vec{R} = R\vec{e}_z$

Il nous faut projeter le poids dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_z)$:



$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$

On obtient alors $\vec{P} = mg(\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)\vec{e}_x - \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)\vec{e}_z) = mg(\sin\alpha\vec{e}_x - \cos\alpha\vec{e}_z)$.

Obtention de l'expression de la vitesse :

Pour obtenir l'expression de la vitesse du palet au bas du toboggan v_B, il faut rechercher un scalaire donc utiliser le théorème de l'énergie cinétique sous forme **intégrale** entre l'instant du lâché du palet (A) et l'instant auquel il arrive en bas (B) :

$$\Delta E_c = W_{AB}(\vec{P}) + W_{AB}(\vec{R})$$

Calculons alors les travaux de chacune des forces :

- Le travail du poids est donné par : $W_{AB}(\vec{P}) = \vec{P}.\overrightarrow{AB}$ car le poids est une force constante. On obtient alors $\boxed{W_{AB}(\vec{P}) = mgh}$.
- La réaction du support ne travaille pas car elle est orthogonale au mouvement.

Ainsi, on obtient :

$$E_c(B) - E_c(A) = W_{AB}(\vec{P}) \qquad \text{soit} \qquad \frac{1}{2}mv_B^2 - 0 = mgh$$

La vitesse du palet en bas du toboggan s'exprime alors :

$$\boxed{v_B = \sqrt{2gh}}$$

Obtention de l'équation du mouvement :

Pour obtenir l'équation du mouvement, il faut donc utiliser le théorème de l'énergie cinétique sous forme **différentielle** :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}(\vec{P}) + \mathcal{P}(\vec{R})$$

Exprimons les vecteurs cinématiques, sachant que le mouvement est rectiligne (on définit O comme la position initiale du palet) :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculons alors les puissances des forces :

- $\mathcal{P}(\overrightarrow{P}) = \overrightarrow{P}.\vec{v}$ soit, compte tenu de l'expression de $\overrightarrow{P}$, $\mathcal{P}(\overrightarrow{P}) = mg\sin\alpha\dot{x}$
- La force de réaction du support ne travaillant pas, la puissance associée à cette force est donc nulle.

L'évolution de l'énergie cinétique au cours du temps est donnée par $E_c(t) = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2$. Ainsi, le théorème devient :

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right)}{\mathrm{d}t} = mg\cos\alpha\dot{x} \qquad \text{soit} \qquad m\dot{x}\ddot{x} = mg\sin\alpha\dot{x}$$

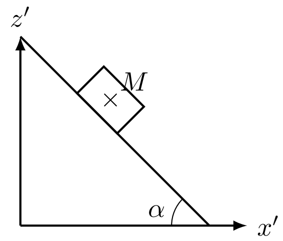
Ainsi, la vitesse n'étant pas nulle, cette équation devient :

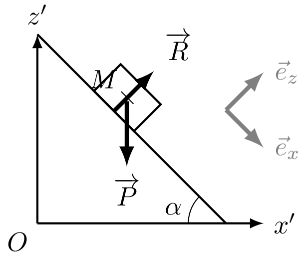
$$\boxed{\ddot{x} = g\sin\alpha}$$

Savoir-faire 2 - Savoir utiliser le théorème de l'énergie mécanique et choisir la bonne forme

Le système auquel on s'intéresse est le palet qu'on étudie dans un référentiel terrestre supposé galiléen. On choisit le même repère cartésien que dans le savoir-faire précédent.

Faisons un schéma :





Le bilan des forces appliquées au palet donne :

- le poids du palet : $\overrightarrow{P} = m\vec{g} = mg(\sin\alpha\vec{e}_x - \cos\alpha\vec{e}_z)$
- la réaction normale du support (la réaction tangentielle est nulle car on néglige les frottements) : $\overrightarrow{R} = R\vec{e}_z$

Obtention de l'expression de la vitesse :

Pour obtenir l'expression de la vitesse du palet au bas du toboggan v_B, il faut rechercher un scalaire donc utiliser le théorème de l'énergie mécanique sous forme **intégrale** entre l'instant du lâché du palet (A) et l'instant auquel il arrive en bas (B) :

$$\Delta E_m = W_{AB}(\overrightarrow{R}) \qquad \text{car seule } \overrightarrow{R} \text{ est non-conservative.}$$

$\overrightarrow{R}$ ne travaille pas, ainsi, on obtient :

$$E_c(B) - E_c(A) + E_{p_p}(B) - E_{p_p}(A) = 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{1}{2}mv_B^2 - 0 + 0 - mgh = 0$$

La vitesse du palet en bas du toboggan s'exprime alors :

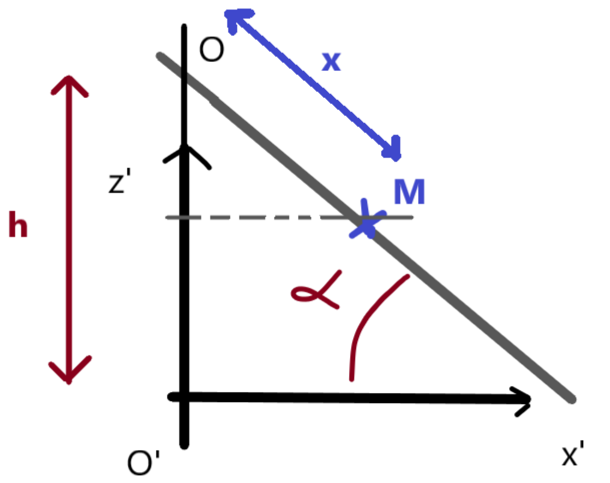
$$\boxed{v_B = \sqrt{2gh}}$$

Obtention de l'équation du mouvement :

Pour obtenir l'équation du mouvement, il faut donc utiliser le théorème de l'énergie mécanique sous forme **différentielle** :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}(\overrightarrow{R})$$

La force $\overrightarrow{R}$ ne travaille pas et l'énergie potentielle de pesanteur est donnée par $E_{p_p}(t) = mgz'(t)$.



Le schéma ci-dessus nous permet de donner la relation suivante :

$$\frac{h - z'(t)}{x(t)} = \sin\alpha \qquad \text{soit} \qquad E_{p_p} = mg(h - x(t)\sin\alpha)$$

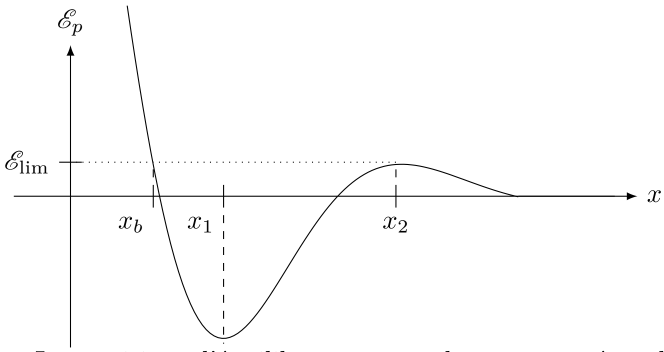
De plus, l'évolution de l'énergie cinétique au cours du temps est donnée par $E_c(t) = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2$. Ainsi, le théorème devient :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0 = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mg(h - x(t)\sin\alpha)\right)}{\mathrm{d}t}$$

Ainsi, la vitesse n'étant pas nulle, cette équation devient :

$$\boxed{\ddot{x} = g\sin\alpha}$$

Savoir-faire 3 - Savoir exploiter un graphe d'énergie potentielle pour un mouvement à 1 degré de liberté



Les positions d'équilibre correspondent aux extréma de l'énergie potentielle. On identifie alors les positions x_1 et x_2 sur le schéma.
L'énergie en x_1 passe par un minimum donc sa dérivée seconde est positive, c'est donc une position d'équilibre **stable**.
L'énergie en x_2 passe par un maximum donc sa dérivée seconde est négative, c'est donc une position d'équilibre **instable**.

Le point M sera dans un état lié si les valeurs accessibles par l'énergie potentielle sont bornées. Cela est possible à condition d'avoir $\mathscr{E}_m < \mathscr{E}_{\text{lim}}$ et la position initiale de M dans l'intervalle $]x_b, x_2[$.

Savoir-faire 4 - Franchissement d'une barrière de potentiel

1/ La seule action agissant sur la bille est le poids, force conservative on en déduit donc que le système est conservatif. L'énergie mécanique est donc **constante.**

2/ Si la bille atteint ”tout juste” le haut du col, cela veut dire que $E_m = E_b$.
Le référentiel étant galiléen, on peut appliquer le théorème de l'énergie mécanique à la bille entre $x = 0$ et x_b :

$$\Delta E_m = 0 \iff E_c(0) - E_c(x_b) + E_p(0) - E_p(x_b) = 0$$

Or, $E_c(0) = \frac{1}{2}mv_0^2$ et $E_c(x_b) = 0$ car la bille atteint tout juste le haut du col. De plus, d'après le profil d'énergie potentielle, $E_p(0) = E_1$ et $E_p(x_b) = E_b$.
Ainsi :

$$v_{0,\text{lim}}^2 = \frac{2(E_b - E_1)}{m}$$

Donc :

$$\boxed{v_{0,\text{lim}} = \sqrt{\frac{2(E_b - E_1)}{m}}}$$

3/ Si $v_0 < v_{0,\text{lim}}$ alors la bille ne passe pas la barrière.
Si $v_0 > v_{0,\text{lim}}$ alors la bille passe la barrière.

4/ $E_b = mgh_b$ et $E_1 = mgh_1$, ainsi :

$$\boxed{v_{0,\text{lim}} = \sqrt{2g(h_b - h_1)}}$$