

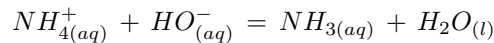
On se revoit mardi

**I- Teneur en élément azote d'un engrais (Banque BT 2020)**

1/ La réaction de dissolution dans l'eau est la suivante

2/ L'ion ammonium est un acide de Brønsted car il est susceptible de libérer un proton  $H^+$  pour donner l'ammoniac.

3/ L'équation du titrage est la suivante

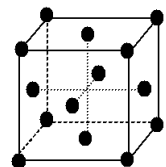
4/ On peut utiliser la méthode des tangentes, même si elle est difficile à appliquer ici : on trace deux tangentes à la courbe en bas et en haut du saut de  $pH$ , parallèles entre elles, on trace le segment reliant les deux droites et étant perpendiculaire à ces deux droites, puis la médiatrice de ce segment. L'intersection de la médiatrice avec la courbe  $pH = f(V)$  donne l'équivalence.Graphiquement on retrouve  $V_E \simeq 14 \text{ mL}$  de l'énoncé<sup>1</sup>.5/ À l'équivalence, les réactifs sont tous les deux réactifs limitants, donc il n'y a pas d'ion ammonium et d'ions hydroxyde en solution. On a par contre de l'ammoniac  $NH_3$  et des ions spectateurs  $NO_3^-$  et  $Na^+$ , ainsi que des molécules d'eau.A l'équivalence, la concentration de la base du couple est forcément supérieure à celle de l'acide du couple puisque les ions ammonium ont totalement disparu, donc  $pH > pK_A$ . Comme  $pK_A = 9,6$ , la solution est basique.

6/ A l'équivalence, les réactifs sont tous les deux réactifs limitants, donc la quantité de matière en ions ammonium dans le bécher est égale à l'avancement de la réaction à l'équivalence

$$n(NH_4^+) = \xi_E$$

La quantité de matière contenue dans la fiole est 25 fois plus grande, donc  $n_{fiole}(NH_4^+) = 25\xi_E$ .7/ Chaque mole de nitrate d'ammonium contient deux moles d'élément azote, donc  $n(N) = 1,4 \cdot 10^{-1} \text{ mol}$ . Compte tenu de la masse molaire de l'azote, la masse d'azote dans l'échantillon de 6 g vaut alors  $m(N) = 14 \cdot 1,4 \cdot 10^{-1} = 1,96 \text{ g}$  d'azote. Le pourcentage en masse d'azote est donc de l'ordre de 33 % ce qui correspond, probablement aux incertitudes de mesure près, à l'indication du fabricant.**II - Oxyde de zirconium (Banque PT 2015)**

8/ Le Zr est dans le « bloc d » de la classification périodique.

9/ Pour le titane,  $Z = 22$  donc la configuration électronique est  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^2$ .Pour le zirconium,  $Z = 40$  donc la configuration électronique est  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 5s^2 4d^2$ .10/ Les règles utilisées sont la règle de Pauli : deux électrons d'un même atome ne peuvent avoir leurs quatre nombres quantiques identiques, et la règle de Klechkowski : les sous-couches sont remplies par valeur de  $n + l$  croissante ; et pour une même valeur de  $n + l$ , par valeur  $n$  croissante.11/ Il y a 1 cations au centre de chaque face, appartenant à deux mailles et 1 cation par sommet appartenant à 8 mailles donc  $8 \times 1/8 + 6 \times 1/2 = 4$  cations par maille.12/ La compacité  $C$  est le rapport entre le volume occupé par les atomes de la maille assimilés à des sphères indéformables de rayon  $r$  et le volume de la maille. La structure cfc est compacte et atteint la compacité maximale de  $C = 0,74$ .13/ Un site tétraédrique est un interstice à égale distance de 4 cations qui sont les sommets d'un tétraèdre. Dans la structure cfc, il s'agit du centre des 8 cubes d'arête  $a/2$ . Il y en a donc 8 par maille.

1. La courbe est ici assez difficile à utiliser compte tenu de la faible hauteur du saut de  $pH$ , l'incertitude sur  $V_{eq}$  est donc relativement importante

14/ Le contact anion/cation se fait sur la grande diagonale d'un cube d'arête  $a/2$  :

$$\frac{a}{2}\sqrt{3}\frac{1}{2} = 2(r^+ + r^-), \text{ d'où } \boxed{r^- = \frac{a\sqrt{3}}{4} - r^+}$$

15/ Il y a 8 anions par maille puisqu'il y a 8 sites tous occupés et n'appartenant qu'à une seule maille.

16/ Il y a donc deux fois moins de cations zirconium +IV que d'anions  $O^{2-}$ . La formule la plus simple qui convient est donc  $ZrO_2$ . On peut aussi remarquer que cette formule donne un composé neutre.

17/ La coordinence est le nombre de plus proches voisins.

Un anion au centre d'un tétraèdre formé par les cations a 4 plus proches voisins. La coordinence d'un anion par rapport aux cations est donc 4.

Un cation à un sommet de la maille est entouré de 8 anions dans les 8 sites tétraédriques l'entourant. La coordinence d'un cation par rapport aux anions est 8.

18/ La masse volumique est le rapport de la masse des atomes contenus dans la maille sur le volume de la maille :  $\rho = \frac{8M_O + 4M_{Zr}}{N_A a^3}$

19/ Comme l'oxygène se trouve toujours sous la forme d'anions  $O^{2-}$  (c'est le cas dans tous les oxydes), on déduit la charge  $z$  du cation yttrium par la neutralité de la structure,  $2z + 3 \times (-2) = 0$  soit  $z = 3$ , le cation yttrium est donc  $Y^{3+}$ .

20/ Si la substitution se fait le plus simplement possible, un cation  $Zr^{4+}$  est remplacé par un cation  $Y^{3+}$  : tout se passe donc comme si le cristal avait perdu une charge +, c'est-à-dire qu'il s'est chargé négativement.

21/ En fonction de  $x$  et  $y$ , la formule chimique de la structure s'écrit  $Y_x Zr_{1-x} O_y$ . La neutralité impose  $3x + 4(1-x) - 2y = 0$  soit  $y = 2 - \frac{x}{2}$ . Ainsi, au cours du processus de substitution, certains sites tétraédriques de l'alliage se vident de leurs ions  $O^{2-}$  pour préserver la neutralité de la structure.

### III- Mouvement de la lune (EPITA 2019)

#### A) Mouvement du centre de masse de la Lune

22/ Référentiel de Copernic : centré sur le centre de masse du système solaire axes dirigés vers des étoiles lointaines. Galiléen pour des expériences courtes devant la période de rotation du système solaire autour du centre de la galaxie.

Référentiel géocentrique : centré sur le centre de la Terre, mêmes axes que celui de Copernic. Galiléen pour des expériences courtes devant une année.

Référentiel terrestre : lié à la Terre. Galiléen pour des expériences courtes devant un jour.

23/  $\vec{F}_g = -\frac{Gm_L m_T}{|\vec{T}\vec{L}|^3} \vec{T}\vec{L} = -\frac{Gm_L m_T}{r} \vec{e}_r$  où  $\vec{e}_r$  est le vecteur colinéaire à  $\vec{T}\vec{L}$  de même sens et unitaire.

24/ La seule force subie par la Lune est centrale. Le moment de cette force par rapport à l'axe ( $Tz$ ) est donc nul. Étant dans le référentiel géocentrique supposé galiléen dans les conditions de l'étude, on peut appliquer le théorème du moment cinétique à la Lune, on en déduit ainsi :

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}_T}{dt} = \vec{0}$$

où  $\vec{\mathcal{L}}_T$  est le vecteur moment cinétique de la Lune par rapport au point  $T$ . On en déduit donc qu'il est constant.

Ainsi, à quelqu'instant que ce soit  $\vec{T}\vec{L}$  et  $\vec{v}$  sont toujours perpendiculaires à un vecteur constant, qui permet de définir un plan, plan d'évolution de la Lune au cours du temps.

25/ Par définition :

$$\vec{\mathcal{L}}_T = m_L \vec{T}\vec{L} \wedge \vec{v}$$

Dans le repère polaire ( $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ ), les vecteurs  $\vec{T}\vec{L}$  et  $\vec{v}$  ont pour expressions :

$$\vec{T}\vec{L} = r\vec{e}_r \quad \text{et} \quad \vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

On en déduit donc que :

$$\vec{\mathcal{L}}_T = mr\vec{e}_r \wedge (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = m_L r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$$

26/ On déduit ainsi de la réponse précédente qu'on peut poser  $C = r^2 \dot{\theta}$ . Comme la norme de  $\vec{\mathcal{L}}_T$  est constante et que la masse  $m_L$  de la Lune l'est aussi,  $C$  est bien une constante du mouvement.

- 27/ 2ème loi de Kepler : l'aire balayée par le vecteur  $\vec{TL}$  par unité de temps est une constante. Avec un schéma, on peut montrer que cette vitesse aréolaire vaut  $C/2$  (je vous laisse regarder votre cours si vous ne vous en souvenez plus;).
- 28/ Appliquons le principe fondamental de la dynamique à la Lune dans le référentiel géocentrique, on obtient :

$$m_L \vec{a} = \vec{F}_g \quad \text{avec} \quad \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$$

On peut donc projeter sur les deux vecteurs de base :

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{Gm_T}{r^2} \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \end{cases}$$

On remarque bien que la composante orthoradiale de l'accélération est nulle.

- 29/ D'après l'énoncé :

$$\vec{e} = \frac{\vec{v} \wedge \vec{\mathcal{L}}_T}{Gm_T m_L} - \vec{e}_r$$

Ainsi, en utilisant les expressions précédemment établies :

$$\vec{e} = \frac{(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) \wedge m_L C \vec{e}_z}{Gm_T m_L} - \vec{e}_r = \frac{-\dot{r}C\vec{e}_\theta + \frac{C^2}{r}\vec{e}_r}{Gm_T} - \vec{e}_r$$

En dérivant par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{-\ddot{r}C\vec{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}C\vec{e}_r + \frac{C^2}{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta - \frac{C^2}{r^2}\dot{r}\vec{e}_r}{Gm_T} - \dot{\theta}\vec{e}_\theta = \frac{-\ddot{r}r^2\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}r^2\dot{\theta}\vec{e}_r + \frac{r^4\dot{\theta}^2}{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta - \frac{r^4\dot{\theta}^2}{r^2}\dot{r}\vec{e}_r}{Gm_T} - \dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

Soit :

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{-\ddot{r}r^2\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r^3\dot{\theta}^2\dot{\theta}\vec{e}_\theta - Gm_T\dot{\theta}\vec{e}_\theta}{Gm_T}$$

Or, en utilisant la composante radiale de l'accélération obtenue à la question précédente, on obtient :

$$Gm_T = -r^2(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \quad \text{d'où} \quad \frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{-\ddot{r}r^2\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r^3\dot{\theta}^2\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r^2(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\dot{\theta}\vec{e}_\theta}{Gm_T} = \vec{0}$$

Le vecteur  $\vec{e}$  est donc bien une constante du mouvement.

- 30/  $\vec{e} = \left(\frac{C^2}{rGm_T} - 1\right)\vec{e}_r - \frac{C\dot{r}}{Gm_T}\vec{e}_\theta$ , ainsi  $\vec{e} \cdot \vec{TL} = \|\vec{e}\|r \cos \theta$  en utilisant la définition du produit scalaire et  $\vec{e} \cdot \vec{TL} = \left(\frac{C^2}{rGm_T} - 1\right)r$  en remarquant que  $\vec{TL}$  n'est porté que par  $\vec{e}_r$ .

On en déduit que  $r = \frac{p}{1+e \cos \theta}$  avec  $e = \|\vec{e}\|$  et  $p = \frac{C^2}{Gm_T}$ .

$\vec{e}$  est appelé vecteur excentricité car sa norme est l'excentricité de l'orbite elliptique, et sa direction suivant le grand axe.

- 31/ Apogée : point de l'orbite le plus éloigné de l'astre attracteur, ici atteint pour  $\theta = 0$ . Périgée : le moins éloigné, ici atteint pour  $\theta = \pi$ .
- 32/  $r_A = \max(r) = \frac{p}{1-e}$  et  $r_P = \min(r) = \frac{p}{1+e}$ .

On en déduit par fraction :  $e = \frac{r_A - r_P}{r_A + r_P}$  et  $p = \frac{2r_P r_A}{r_A + r_P}$ .

L'application numérique donne :  $e = 6,54 \cdot 10^{-2}$   $p = 3,80 \cdot 10^8$  m et  $C = \sqrt{pGm_T} = 3,89 \cdot 10^{11}$  m<sup>2</sup> · s<sup>-1</sup>.

- 33/ On a montré en question 27/ que l'aire balayée par unité de temps vaut  $\frac{C}{2}$ . On a donc l'égalité suivante :

$$\frac{C}{2} = \frac{\mathcal{A}}{T_L}$$

donc  $\frac{C^2}{4} = \frac{\mathcal{A}^2}{T_L^2}$ .

Or, l'énoncé nous donne, pour une ellipse,  $\mathcal{A}^2 = a^3 p$  et on a établi que  $p = C^2 / (Gm_T)$ , il vient donc :

$$\frac{a^3}{T_L^2} = \frac{Gm_T}{4\pi^2}$$

- 34/ D'après la 3ème loi de Kepler montrée précédemment,  $T_L = \sqrt{(4\pi a^3)/(Gm_T)}$ . l'application numérique donne  $T_L = 27,2$  j, sensiblement égale à la donnée de l'énoncé.
- 35/ Au vu de l'expression de la force d'attraction gravitationnelle, celle-ci étant newtonnienne, on peut directement établir que :

$$E_p(r) = -\frac{Gm_T m_L}{r} + \text{cste}$$

Or, d'après l'énoncé,  $E_p = 0$  quand  $r \rightarrow \infty$ , donc :

$$E_p(r) = -\frac{Gm_T m_L}{r}$$

- 36/ Par définition,  $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ . D'après l'expression de  $\vec{v}$  établie précédemment, on obtient ainsi :

$$E_c = \frac{m_L}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) = \frac{m_L}{2} \left( \dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2} \right)$$

- 37/ Par définition,  $E_m = E_c + E_p$ , soit, ici :

$$E_m = \frac{m_L}{2} \left( \dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2} \right) - \frac{Gm_T m_L}{r}$$

Dans le référentiel géocentrique, la Lune n'est soumise qu'à  $\vec{F}_g$  qui est conservative (elle dérive d'une énergie potentielle), donc  $E_m$  est constante.

- 38/ Lorsque  $r = r_a$  ou  $r = r_p$ ,  $\dot{r} = 0$ . On peut donc écrire :

$$E_m = \frac{m_L C^2}{2r_a^2} - \frac{Gm_L m_T}{r_a} \quad (1) \quad \text{et} \quad E_m = \frac{m_L C^2}{2r_p^2} - \frac{Gm_L m_T}{r_p} \quad (2)$$

En considérant l'équation  $r_a^2 \times (1) - r_p^2 \times (2)$ , on obtient :

$$(r_a^2 - r_p^2)E_m = -Gm_T m_L (r_a - r_p)$$

On en déduit donc :

$$E_m = -\frac{Gm_T m_L}{r_a + r_p} = -\frac{Gm_T m_L}{2a}$$

L'application numérique donne :  $E_m = -3,83.10^{28}$  J

- 39/ La trajectoire suivie par la fusée est elliptique. On vient d'établir que :

$$E_{m,f} = -\frac{Gm_T m_f}{2a}$$

où  $m_f$  est la masse de la fusée.

- 40/ L'énergie mécanique est constante sur la trajectoire elliptique, on l'exprime juste après l'augmentation de la vitesse :

$$E_{m,f} = \frac{1}{2}m_f v_1^2 - \frac{Gm_f m_T}{R_T} = -\frac{Gm_f m_T}{2a} \quad \text{soit} \quad v_1^2 = 2Gm_T \left( \frac{1}{R_T} - \frac{1}{2a} \right)$$

L'application numérique donne :  $v_1 = 11,1$  km · s<sup>-1</sup>

- 41/ La Terre est située à un foyer de l'ellipse. Il faut allumer les moteurs juste avant que la Lune ne soit alignée sur la droite (foyer périégée) de telle façon que la Lune et la fusée coupent en même temps cette droite et que la fusée puisse orbiter autour de la Lune.
- 42/ Le satellite parcourt une moitié d'ellipse, il suffit alors de déterminer la période de révolution grâce à la troisième loi de Kepler :

$$T_1 = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{Gm_T}}$$

L'application numérique donne :  $t_1 = 4,8$  jours. Il faut bien calculer pour bien viser...

B) Rotation propre de la Lune

$$43/ \vec{g}(M_1) = \frac{\vec{F}_g(M_1)}{m_L} = -\frac{m_T G}{(a - R_L)^2} \vec{e}_r$$

$$\vec{g}(M_2) = \frac{\vec{F}_g(M_2)}{m_L} = -\frac{m_T G}{(a + R_L)^2} \vec{e}_r$$

Ainsi :

$$\Delta \vec{g} = -Gm_T \left( \frac{1}{(a - R_L)^2} - \frac{1}{(a + R_L)^2} \right) \vec{e}_r = -\frac{Gm_T}{a^2} \left( \frac{1}{(1 - \frac{R_L}{a})^2} - \frac{1}{(1 + \frac{R_L}{a})^2} \right) \vec{e}_r$$

Or, à l'ordre 1 en  $\frac{a}{R_L}$ , on obtient :

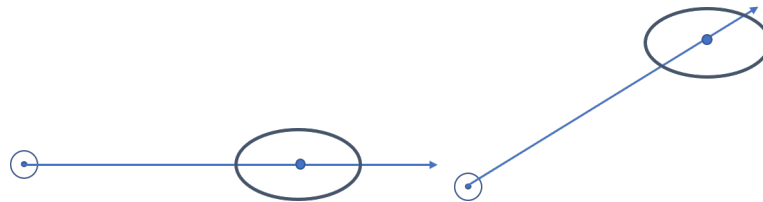
$$\Delta \vec{g} = -\frac{Gm_T}{a^2} \left( 1 + \frac{R_L}{a} - \left( 1 - \frac{R_L}{a} \right) \right) \vec{e}_r = -\frac{2Gm_T R_L}{a^3} \vec{e}_r$$

L'application numérique donne :  $\|\Delta \vec{g}\| = 4,97 \cdot 10^{-5} \text{ m.s}^{-2}$ .

44/ Si on regarde le schéma de la figure 2, le point  $M_1$  est davantage attiré vers la Terre que  $L$  (décroissance de la norme de  $\vec{F}_g$  en  $1/r^2$ ). De même, le point  $M_2$  l'est moins, ce qui explique la forme ellipsoïdale.

45/ Réfléchissons à l'extrême :

Prenons  $\omega_P = 0$  : la Lune ne tourne pas sur elle-même :



Dans ce cas  $\varphi < 0$  comme dans la situation B.

On en conclut que la situation A correspond au cas  $\omega_L < \omega_P$  et à l'inverse la situation B correspond au cas  $\omega_L > \omega_P$ .

46/ Par définition du moment d'inertie :

$$\mathcal{L}_z = J_z \omega_P \quad \text{où } J_z \text{ est le moment d'inertie de la lune autour de l'axe } Lz$$

D'après l'énoncé, on a ainsi :

$$\mathcal{L}_z = \frac{2}{5} m_L R_L^2 \omega_P$$

47/ Le moment de la force agissant sur  $L$  est nul car son bras de levier est nul. Les moments agissant sur  $L_1$  et  $L_2$  sont sensiblement égaux. En effet, les intensités des forces sont très proches (les distances par rapport au centre de la Terre valent approximativement  $a$ ), et les bras de levier valent  $R|\sin \varphi|$  (à justifier par un petit schéma). D'où la relation demandée :  $\mathcal{A} = \frac{2GR_L m_T \Delta m}{a^2} \sin \varphi$

48/ Le référentiel sélénocentrique n'est pas galiléen, on ne peut donc pas appliquer le théorème du moment cinétique en toute impunité.

49/ Si  $\omega_p < \omega_L$  (schéma B),  $\varphi < 0$ , donc d'après la relation donnée dans l'énoncé,  $\dot{\omega}_p > 0$ , donc  $\omega_p$  augmente. Au contraire, si  $\omega_p > \omega_L$  (schéma B),  $\varphi > 0$ , donc d'après la relation,  $\dot{\omega}_p < 0$ . Dans tous les cas, on constate que  $\omega_p$  se rapproche de  $\omega_L$ .

50/ De la même façon, le Soleil déforme la Terre, et exerce donc dessus un couple qui tend à synchroniser la période de rotation propre de la Terre avec la période de révolution autour du Soleil. À part accident astronomique de grande ampleur, la durée du jour va continuer de croître pour tendre vers un an.