DS 5

Du fun, du fun et encore du fun

I- Suspension de véhicule

A) Suspension avec amortissement

Avant toute chose, précisons que nous étudions le système véhicule réduit au point M.

1/ D'après l'énoncé :

$$[h] = \frac{[F]}{[v]}$$

Or, d'après le principe fondamental de la dynamique : $[F] = [m].[a]$ avec a une accélération et m une masse.

Par définition de l'accélération : $[a] = \frac{[v]}{T}$, donc :

$$[h] = \frac{[m][v]}{[v]T} = M.T^{-1}$$

Dans le système international, h s'exprime en m.s^{-1}.

2/ Hors d'équilibre, le véhicule est soumis à :

- son poids $\overrightarrow{P}$ de direction verticale et orienté vers le bas. Sa norme est mg, son expression est donc : $\overrightarrow{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$.
- la force de frottement fluide $\overrightarrow{F}$ de direction verticale et orientée dans le sens opposé à la vitesse. Sa norme est hv, son expression est donnée dans l'énoncé.
- la force de rappel du ressort $\overrightarrow{F}_r$ de direction verticale et orientée vers la position d'équilibre du ressort. Sa norme est $k(z - l_0)$, son expression est donc : $\overrightarrow{F}_r = -k(z - l_0)\vec{u}_z$.

Ici, un schéma permet de clarifier votre propos !

3/ Le véhicule est étudié dans un référentiel galiléen. À l'équilibre, $\ddot{z}$ et $\dot{z}$ sont nuls, on peut donc, d'après le principe d'inertie, affirmer que les forces se compensent :

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{F} + \overrightarrow{F}_r = 0$$

De plus, $\dot{z} = 0$ donc $v = 0$, on en déduit donc que :

$$m\vec{g} - k(z_e - l_0)\vec{u}_z = 0 \quad \text{soit, en projetant sur } \vec{u}_z \quad \boxed{z_e = l_0 - \frac{mg}{k}}$$

4/ Le principe fondamental de la dynamique appliqué au véhicule s'écrit ici :

$$m\vec{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{F} + \overrightarrow{F}_r = m\vec{g} - h\vec{v} - k(z - l_0)\vec{u}_z$$

où $\vec{a}$ est l'accélération du véhicule (pas seulement verticale).

Projetons cette équation vectorielle sur $\vec{u}_z$ et rappelons que $\vec{a}.\vec{u}_z = \ddot{z}$ et $\vec{v}.\vec{u}_z = \dot{z}$:

$$m\ddot{z} + h\dot{z} + kz = kl_0 - mg \quad \text{soit} \quad \ddot{z} + \frac{h}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}l_0 - g = \frac{k}{m}z_e$$

5/ Il s'agit d'une équation différentielle du deuxième ordre, le discriminant de l'équation caractéristique associée est :

$$\Delta = \frac{h^2}{m^2} - 4\frac{k}{m}$$

- Le régime est pseudo-périodique si $\Delta < 0$ soit : $h^2 < 4km$
- Le régime est critique si $\Delta = 0$ soit : $h^2 = 4km$
- Le régime est apériodique si $\Delta > 0$ soit : $h^2 > 4km$

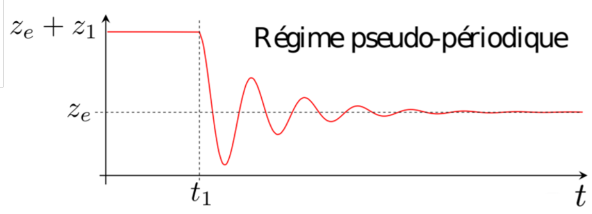
6/ Lorsque le véhicule est en charge, la masse augmente. Notons m la masse à vide et m' la masse chargée. $h^2 = 4km$ et $m' > m$ donc $h^2 < 4km$ le véhicule est alors en régime pseudo-périodique.

7/ Pour que le véhicule reste en régime apériodique, il faut que l'inégalité $h^2 > 4km'$ soit vérifiée. Il faut donc que l'amortissement soit suffisant pour assurer cette inégalité.

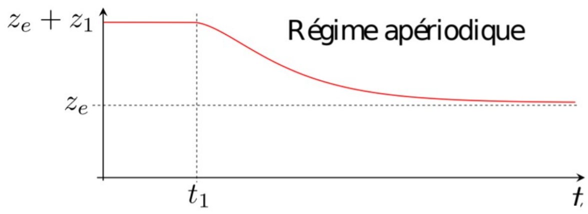
8/ Le ressort n'est plus fixé en 0, il faut donc modifier l'expression de la force de rappel du ressort : $\overrightarrow{F}_r = -k(z - z_s - l_0)\vec{u}_z$, la longueur du ressort étant à présent de $z - z_s$.
L'équation différentielle devient alors :

$$\ddot{z} + \frac{h}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}l_0 - g = \frac{k}{m}(z_e + z_s)$$

La résolution de cette équation correspond donc à la réponse à un échelon de hauteur z_1, la hauteur du véhicule vaut donc z_e pour $t < t_1$ et pour $t \gg t_1$:



9/ Pour le régime apériodique :



B) Régime forcé

10/ La longueur du ressort est $z - z_s$, on en déduit donc l'expression suivante pour la force exercée par le ressort sur le véhicule :

$$\boxed{\overrightarrow{F} = -k(z - z_s - l_0)\vec{u}_z}$$

11/ Le principe fondamental de la dynamique appliqué au véhicule donne :

$$m\vec{a} = m\vec{g} - h(\dot{z} - \dot{z}_s)\vec{u}_z - k(z - z_s - l_0)\vec{u}_z$$

En projetant cette équation sur $\vec{u}_z$, on obtient :

$$m\ddot{z} + h\dot{z} + kz = -mg + h\dot{z}_s + kz_s + kl_0$$

En divisant par m et en reconnaissant z_e, on obtient :

$$\boxed{\ddot{z} + \frac{h}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}z_e + \frac{h}{m}\dot{z}_s + \frac{k}{m}z_s}$$

12/ Posons $z' = z - z_e$, on en déduit donc que $\dot{z'} = \dot{z}$ et $\ddot{z'} = \ddot{z}$, ainsi :

$$m\ddot{z'} + h\dot{z'} + kz' = h\dot{z}_s + kz_s \quad \text{soit} \quad m\ddot{z'} + h\dot{z'} + kz' = Y(t)$$

en posant $\boxed{Y(t) = h\dot{z}_s + kz_s}$

13/ Avant toute chose, utilisons les grandeurs introduites dans l'énoncé :

$$\ddot{z'} + 2\lambda\dot{z'} + \omega_0^2 z' = 2\lambda\dot{z}_s + \omega_0^2 z_s$$

Passons cette équation en complexes :

$$\ddot{\underline{z}'} + 2\lambda\dot{\underline{z}'} + \omega_0^2\underline{z}' = 2\lambda\dot{\underline{z}_s} + \omega_0^2\underline{z_s}$$

Or, on sait que $\underline{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \dfrac{\mathrm{d}\underline{x}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{j}\omega\underline{x}$ pour un signal quelconque x. L'équation devient donc :

$$(\mathrm{j}\omega)^2\underline{z}' + 2\lambda\mathrm{j}\omega\underline{z}' + \omega_0^2\underline{z}' = 2\lambda\mathrm{j}\omega\underline{z_s} + \omega_0^2\underline{z_s}$$

Ainsi, en factorisant les deux membres de l'équation :

$$\left(\omega_0^2 + 2\lambda\mathrm{j}\omega - \omega^2\right)\underline{z}' = \left(2\lambda\mathrm{j}\omega + \omega_0^2\right)\underline{z_s}$$

On obtient ainsi la réponse complexe :

$$\boxed{\frac{\underline{z}}{\underline{z_s}} = \frac{2\lambda\mathrm{j}\omega + \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\lambda\mathrm{j}\omega}}$$

14/ Le module de la réponse complexe est donnée par :

$$G = \left|\frac{\underline{Z'_m}}{\underline{Z_{s,m}}}\right|$$

or, $\dfrac{\underline{Z'_m}}{\underline{Z_{s,m}}} = \dfrac{\underline{Z'_m}e^{\mathrm{j}\omega t}}{\underline{Z_{s,m}}e^{\mathrm{j}\omega t}} = \dfrac{\underline{z}}{\underline{z_s}}$

On en déduit donc :

$$\boxed{G = \left|\frac{2\lambda\mathrm{j}\omega + \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\lambda\mathrm{j}\omega}\right| = \sqrt{\frac{\omega_0^4 + 4\lambda^2\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}}$$

15/ Lorsque ω tend vers 0, le rapport G tend vers 1. La masse suit donc le profil du sol, son mouvement est sinusoïdal.

16/ Lorsque ω tend vers $+\infty$:

$$\lim_{\omega\to+\infty} G = \lim_{\omega\to+\infty}\sqrt{\frac{4\lambda^2\omega^2}{\omega^4}} = \lim_{\omega\to+\infty}\sqrt{\frac{4\lambda^2}{\omega^2}} = 0$$

La masse a une amplitude de mouvement nulle, elle ne suit donc pas le profil du sol.

17/ ω_r minimise le dénominateur de G, on en déduit donc qu'en ω_r, la dérivée de ce dénominateur s'annule. Posons alors :

$$D(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2$$

Ainsi :

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}\omega} = -4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 8\lambda^2\omega$$

La condition d'annulation s'exprime alors :

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}\omega}(\omega_r) = 0 \quad \text{soit} \quad -4(\omega_0^2 - \omega_r^2)\omega_r + 8\lambda^2\omega_r = 0$$

Nous obtenons donc deux cas :

$$\omega_r = 0 \text{ qui n'est pas très intéressant, ou bien } 4(\omega_0^2 - \omega_r^2) = 8\lambda^2$$

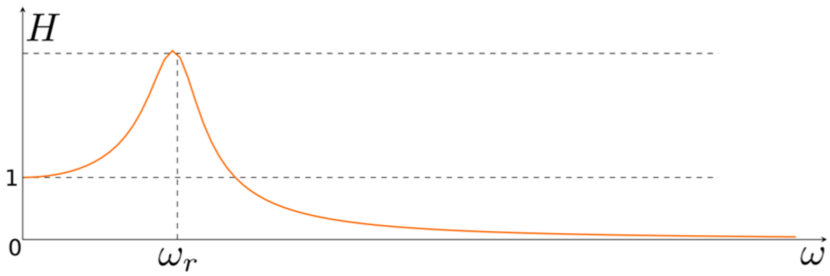
On retient donc l'expression suivante :

$$\boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - 2\frac{\lambda^2}{\omega_0^2}}}$$

Cette racine est légale car $\omega_0^2 > 2\lambda^2$.

Le cas où la pulsation est égale à ω_r correspond à une résonance. L'amplitude d'oscillations de la voiture est maximale, veut-on vraiment cela pour nos enfants... ?

18/ Allure :



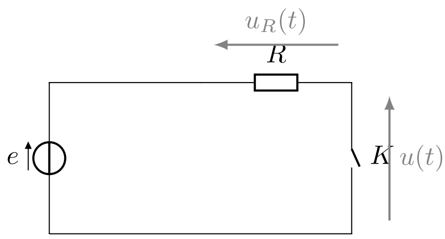
II- Récupération de signal

A) Filtre du premier ordre

19/ En régime sinusoïdal forcé, $u(t)$ est de la forme :

$$\boxed{u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)}$$

20/ En basses fréquences, la bobine est équivalente à un fil, la tension à ses bornes est donc nulle.
En hautes fréquences, elle est équivalente à un interrupteur ouvert.



L'intensité circulant dans le circuit est donc nulle. D'après la loi d'Ohm, $u_R = 0$, donc, d'après la loi des mailles : $u(t) = e(t)$.

Le filtre coupe les basses-fréquences et laisse passer les hautes, c'est un **filtre passe-haut**.

21/ *A priori*, ce filtre est susceptible de récupérer les hautes fréquences donc les signaux « internet ».

22/ L et R sont en série, un pont-diviseur de tension appliqué à L donne :

$$\underline{u}(t) = \frac{\underline{Z_L}}{\underline{Z_R} + \underline{Z_L}}\underline{e}(t) = \frac{\mathrm{j}\omega L}{R + \mathrm{j}\omega L}\underline{e}(t) = \frac{\mathrm{j}\omega\frac{L}{R}}{1 + \mathrm{j}\omega\frac{L}{R}}\underline{e}(t)$$

Ainsi, comme par définition, $\underline{H} = \frac{\underline{e}}{\underline{s}}$:

$$\boxed{\underline{H} = \frac{\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}}}$$

23/ La fréquence de coupure de ce filtre est la fréquence correspondant à la pulsation pour laquelle :

$$|\underline{H}|(\omega_c) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$$

où G_{max} est la valeur maximale atteinte par $|\underline{H}|$. Elle vaut 1 ici, donc :

$$\frac{\omega_c/\omega_0}{\sqrt{1 + \omega_c^2/\omega_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{soit} \quad 2\frac{\omega_c^2}{\omega_0^2} = 1 + \frac{\omega_c^2}{\omega_0^2}$$

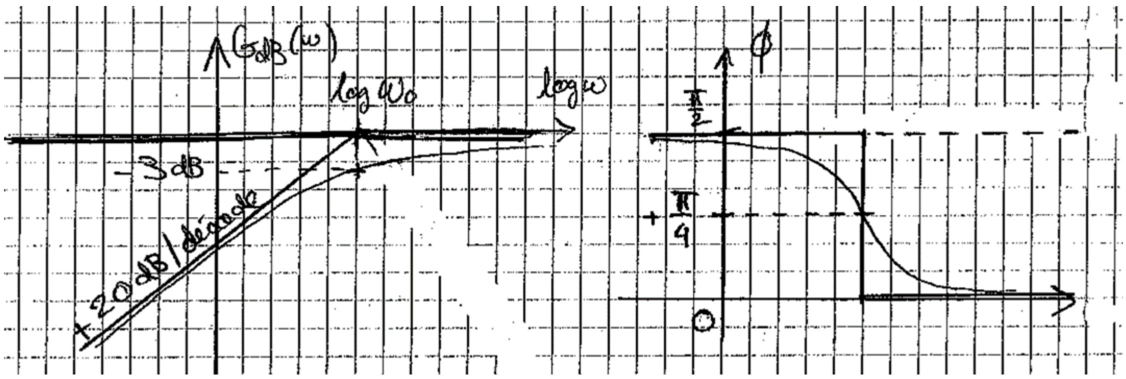
Ainsi : $\omega_c = \omega_0$, donc $\boxed{f_c = f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}}$

L'application numérique donne : $f_c = 3,2.10^2$ Hz. On peut donc récupérer les signaux « internet » mais on récupère également des signaux de conversation. On n'a donc pas isolé les signaux désirés.

24/ Les raisonnements asymptotiques sont résumés dans le tableau suivant :

	$\omega \ll \omega_0$	$\omega = \omega_0$	$\omega \gg \omega_0$
$\underline{H}$	$\underline{H} \sim \mathrm{j}\omega/\omega_0$	$\dfrac{1}{1-\mathrm{j}}$	$\underline{H} \sim 1$
$G = \lvert\underline{H}\rvert$	ω/ω_0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$G_{dB} = 20\log G$	$20\log\frac{\omega}{\omega_0}$	-3 dB	0
φ	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	0

On obtient les diagrammes asymptotiques suivants :



25/ $u(t) = G(f_c)E\cos(2\pi f_c t + \varphi(f_c)) = G(f_0)E\cos(2\pi f_0 t + \varphi(f_0))$ ainsi :

- l'amplitude vaut $\frac{E}{\sqrt{2}} = 1,4$ V
- La phase à l'origine vaut $\frac{\pi}{4} = 0,79$ rad

26/ La tension de sortie s'écrit :

$$s(t) = G(f_1)E\cos(2\pi f_1 t + \varphi(f_1)) + G(f_2)E\cos(2\pi f_2 t + \varphi(f_2))$$

Ainsi, exprimons tout d'abord le gain et le déphasage de ce filtre :

$$G(\omega) = \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \quad \text{et} \quad \varphi(\omega) = \arg(\underline{H}) = \arg\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}\right) - \arg\left(1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{\omega}{\omega_0})$$

- Pour $f_1 = f_0/10$:

$$G(f_1) = \frac{\frac{1}{10}}{\sqrt{1+\frac{1}{100}}} \quad \text{et} \quad \varphi(f_1) = \frac{\pi}{2} - \arctan(1/10)$$

  Soit, numériquement : $G(f_1) = 0,1$ et $\varphi(f_1) = 1,47$ rad.

- Pour $f_2 = 10f_0$:

$$G(f_2) = \frac{10}{\sqrt{1+100}} \quad \text{et} \quad \varphi(f_2) = \frac{\pi}{2} - \arctan(10)$$

  Soit, numériquement : $G(f_2) = 1,0$ et $\varphi(f_2) = 0,1$ rad.

On obtient donc l'expression suivante pour la sortie :

$$\boxed{u(t) = \frac{E}{10}\cos(2\pi f_1 t + 1,47) + E\cos(2\pi f_2 t + 0,1)}$$

27/ À basses fréquences, la fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H} \sim \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{soit} \quad \underline{s}(t) = \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}\underline{e}(t)$$

On peut donc écrire, à basses fréquences :

$$\underline{s}(t) = \frac{1}{\omega_0}\frac{\mathrm{d}\underline{e}}{\mathrm{d}t}$$

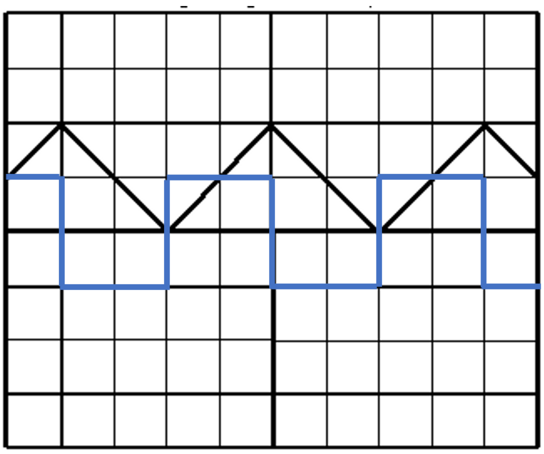
À basses fréquences, le signal de sortie est la dérivée de l'entrée, on en déduit donc que le filtre a un comportement **dérivateur**.

28/ ?

28/(a) Le signal se répète au bout de 4 divisions, on en déduit donc que sa période est $T = 4 \times 5 = 20$ ms. La fréquence du signal est donc de $f = 50$ Hz.

28/(b) $\frac{f_c}{f} \approx 6,4$, la fréquence du signal n'est pas tout à fait 10 fois inférieure à la fréquence de coupure du filtre. Une bonne partie des harmoniques principales sont dérivées, on considèrera donc que le signal triangle devient un signal créneau.

28/(c) Représentation :



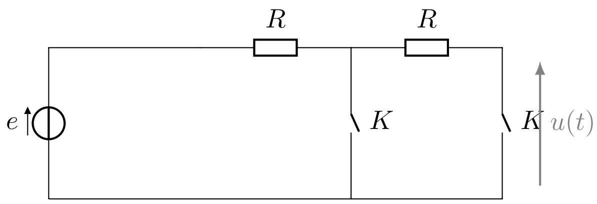
28/(d) Supposons que pour $t \in [0, \frac{T}{2}]$, $e(t) = a.t$, on a $e(\frac{T}{2}) = E \Rightarrow e(t) = \frac{2E}{T} \times t$

$$u(t) = \frac{1}{\omega_0}\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \frac{2E}{\omega_0 T} = \frac{2f}{2\pi f_0}E = \frac{fE}{\pi f_0}$$

Ainsi, $U = u(t) = 0,1$ V

B) Filtres en cascade du deuxième ordre

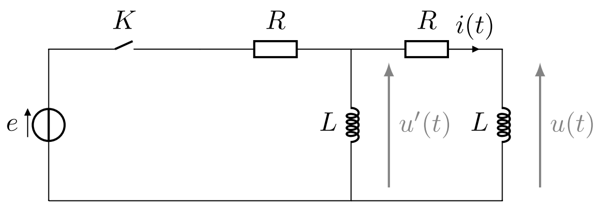
29/ À basses-fréquences, la bobine est équivalente à un fil, donc la tension à ses bornes est nulle.
À hautes fréquences, les bobines sont équivalentes à des interrupteurs ouverts, le circuit équivalent est donc :



Les intensités sont donc nulles dans les bobine, la loi des nœuds nous assure donc qu'elles sont nulles dans tout le circuit.
La loi d'Ohm permet donc d'affirmer que toutes les tensions aux bornes des résistances sont nulles.
Les tensions aux bornes des bobines sont donc égales à $e(t)$.

À haute-fréquence, le filtre laisse passer le signal, c'est donc un passe-haut encore une fois.

30/ Posons u' la tension aux bornes de la bobine du milieu :



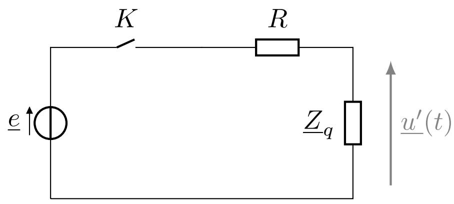
Un pont-diviseur de tension appliqué à la bobine de droite donne :

$$\underline{u}(t) = \frac{\underline{Z_L}}{\underline{Z_R} + \underline{Z_L}}\underline{u'}(t) = \frac{\mathrm{j}\omega L}{R + \mathrm{j}\omega L}\underline{u'}(t)$$

L'association série de la résistance et la bobine de droite donne un dipôle équivalent d'impédance $\underline{Z}_{q,1} = R + \mathrm{j}\omega L$ qui, en parallèle avec la bobine du milieu donne un dipôle équivalent d'impédance donnée par :

$$\frac{1}{\underline{Z}_q} = \frac{1}{\underline{Z}_{q,1}} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L} = \frac{1}{R+\mathrm{j}\omega L} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L} \quad \text{soit} \quad \underline{Z}_q = \frac{\mathrm{j}\omega L(R+\mathrm{j}\omega L)}{R+2\mathrm{j}\omega L}$$

Le circuit équivalent obtenu est alors :



Un pont-diviseur de tension appliqué à cette association donne :

$$\underline{u}'(t) = \frac{\underline{Z}_q}{R+\underline{Z}_q}\underline{e}(t) = \frac{1}{1+\frac{R}{\underline{Z}_q}}\underline{e}(t) = \frac{1}{1+R\frac{R+2\mathrm{j}\omega L}{\mathrm{j}\omega L(R+\mathrm{j}\omega L)}}\underline{e}(t) = \frac{\mathrm{j}\omega L(R+\mathrm{j}\omega L)}{\mathrm{j}\omega L(R+\mathrm{j}\omega L)+R^2+2\mathrm{j}\omega LR}\underline{e}(t) = \frac{\mathrm{j}\omega L(R+\mathrm{j}\omega L)}{R^2+3\mathrm{j}\omega LR-\omega^2L^2}\underline{e}$$

Soit, en utilisant l'expression de $\underline{u}$:

$$\underline{u}(t) = \frac{\mathrm{j}\omega L}{R+\mathrm{j}\omega L} \times \frac{\mathrm{j}\omega L(R+\mathrm{j}\omega L)}{R^2+3\mathrm{j}\omega LR-\omega^2L^2}\underline{e}(t) = \frac{-\omega^2L^2}{R^2+3\mathrm{j}\omega LR-\omega^2L^2}\underline{e}(t)$$

On remarque que :

$$\underline{u}(t) = \frac{-\omega^2\frac{L^2}{R^2}}{1+3\mathrm{j}\omega\frac{L}{R}-\omega^2\frac{L^2}{R^2}}\underline{e}(t) \quad \text{soit} \quad \underline{u}(t) = \frac{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1+3\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\underline{e}(t)$$

Posons $x = \omega/\omega_0$:

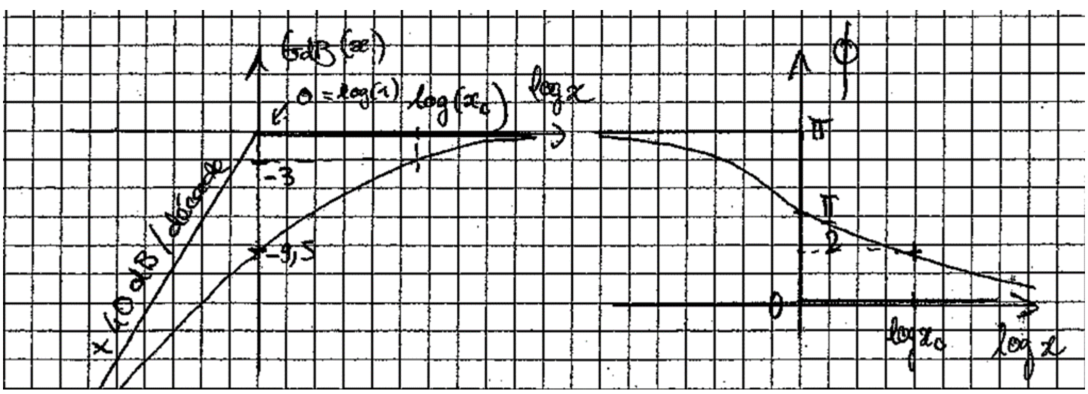
$$\underline{u}(t) = \frac{-x^2}{1+3\mathrm{j}x-x^2}\underline{e}(t) \quad \text{soit, en divisant par } -x^2 \text{ et en rappelant que } \underline{H} = \frac{\underline{u}}{\underline{e}}, \quad \boxed{\underline{H} = \frac{1}{1-3\frac{\mathrm{j}}{x}-\frac{1}{x^2}}}$$

31/ $x \in [0, +\infty]$ donc $Im(\underline{H}) = \dfrac{3\mathrm{j}/x}{\sqrt{(1-1/x^2)^2+9/x^2}} > 0$, l'argument de $\underline{H}$ est donc compris entre 0 et π.

32/ Les raisonnements asymptotiques sont résumés dans le tableau suivant :

	$x \ll 1$	$x = 1$	$x \gg 1$
$\underline{H}$	$\underline{H} \sim -x^2$	$-\frac{1}{3\mathrm{j}}$	$\underline{H} \sim 1$
$G = \lvert\underline{H}\rvert$	x^2	$\frac{1}{3}$	1
$G_{dB} = 20\log G$	$40\log x$	-9,5 dB	0
φ	π	$\frac{\pi}{2}$	0

Le diagramme de Bode asymptotique est ainsi le suivant :



33/ Cf diagramme précédent.
La valeur numérique de f_c est donnée par :

$$G(x_c) = |\underline{H}(x_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Soit :

$$\sqrt{\left(1-\frac{1}{x_c^2}\right)^2+\frac{9}{x_c^2}} = \sqrt{2} \quad \text{d'où} \quad x_c^4 - 2x_c^2 + 1 + 9x_c^2 = 2x_c^4$$

On obtient donc l'équation du second degré pour $X = x_c^2$ suivante :

$$X^2 - 7X - 1 = 0$$

On obtient : $X = 7,1$ soit $\boxed{x_c = 2,7}$

34/ La valeur numérique de f_c est donnée par :

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{\omega_0 x_c}{2\pi}$$

Soit, numériquement :

$$\boxed{f_c = 850 \text{ Hz}}$$

Une fois de plus, les signaux internet passent mais une partie des signaux téléphoniques également. On n'est toujours pas arrivé.e.s...

C) Petit interlude transitoire

35/ On sait que :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 - 3\frac{\mathrm{j}}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{-x^2}{1 + 3\mathrm{j}x - x^2}$$

De plus, $\underline{H} = \dfrac{\underline{u}}{\underline{e}}$, on en déduit donc :

$$\underline{u}\left(1 + 3\mathrm{j}x - x^2\right) = -\underline{e}x^2 \quad \text{soit} \quad \underline{u} + 3\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}\underline{u} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\underline{u} = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\underline{e}$$

En utilisant le fait qu'une multiplication par $\mathrm{j}\omega$ d'un signal complexe correspond à une dérivée de ce signal :

$$\frac{\mathrm{d}\underline{u}}{\mathrm{d}t} + 3\omega_0\frac{\mathrm{d}\underline{u}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\underline{u} = \frac{\mathrm{d}\underline{u}}{\mathrm{d}t}$$

En passant en réel, on pose, $\tau = \dfrac{1}{\omega_0}$:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{3}{\tau}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau^2}u(t) = \frac{\mathrm{d}^2e}{\mathrm{d}t^2}}$$

36/ Réponses :

36/(a) Au vu de l'entrée, l'équation pour $t > 0$ devient :

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{3}{\tau}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau^2}u(t) = 0$$

L'équation homogène a l'équation caractéristique associée suivante :

$$r^2 + \frac{3}{\tau}r + \frac{1}{\tau^2} = 0$$

Dont le discriminant est :

$$\Delta = \frac{9}{\tau^2} - \frac{4}{\tau^2} = \frac{5}{\tau^2} > 0$$

Le régime est donc apériodique. Les solutions de l'équation caractéristiques sont donc :

$$r_{1,2} = -\frac{3}{2\tau} \pm \frac{\sqrt{5}}{2\tau}$$

Les solutions de l'équation différentielle sont ainsi de la forme :

$$u(t)=\left(Ae^{\frac{\sqrt{5}t}{\tau}}+Be^{-\frac{\sqrt{5}t}{\tau}}\right)e^{-\frac{3t}{2\tau}}$$

Donc :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-\frac{3t}{2\tau}\left(Ae^{\frac{\sqrt{5}t}{\tau}}+Be^{-\frac{\sqrt{5}t}{\tau}}\right)e^{-\frac{3}{2\tau}}+\left(\frac{\sqrt{5}}{\tau}Ae^{\frac{\sqrt{5}t}{\tau}}-\frac{\sqrt{5}}{\tau}Be^{-\frac{\sqrt{5}t}{\tau}}\right)e^{-\frac{3t}{2\tau}}$$

<u>CI</u> : Avant fermeture de l'interrupteur, le circuit est ouvert depuis longtemps, aucun courant ne circule donc dans le circuit, l'intensité traversant chaque bobine est donc nulle.
Par continuité du courant dans une bobine, on en déduit donc que $i(0^+)=0$ et $i_2(0^+)=0$ en notant i_2 le courant circulant dans la bobine du milieu. D'après la loi des nœuds, le courant circulant dans la branche du condensateur $i_1(0^+)$ est nul.
On en déduit d'après les lois d'Ohm, que les tensions aux bornes des résistances sont nulles. Ainsi, grâce à une loi des mailles, on obtient que $u(0^+)=E$.
L'énoncé nous donne : $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+)=-\frac{3E}{\tau}$
On obtient donc le système suivant :

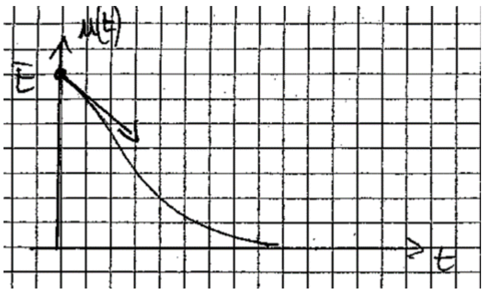
$$\left\{\begin{array}{c} A+B=E \\ -\frac{3}{2\tau}(A+B)+\frac{\sqrt{5}}{\tau}(A-B)=-\frac{3E}{\tau}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} A+B=0 \\ -\frac{3}{2\tau}E+\frac{\sqrt{5}}{\tau}(A-B)=-\frac{3E}{\tau}\end{array}\right.$$

Soit :

$$\left\{\begin{array}{c} A+B=0 \\ \frac{\sqrt{5}}{\tau}A-B=-\frac{3E}{2\tau}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} A+B=0 \\ A-B=-\frac{3E}{2\sqrt{5}}\end{array}\right. \Leftrightarrow \boxed{\left\{\begin{array}{c} A=-\frac{3E}{4\sqrt{5}} \\ B=\frac{3E}{4\sqrt{5}}\end{array}\right.}$$

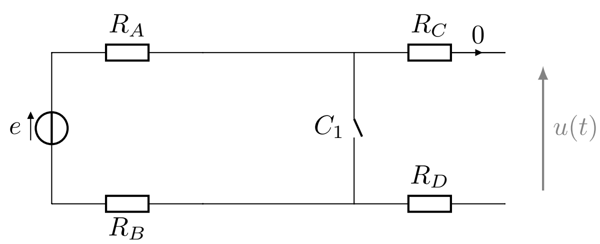
Ainsi : $\boxed{u(t)=\left(-\frac{3E}{4\sqrt{5}}e^{\frac{\sqrt{5}t}{\tau}}+\frac{3E}{4\sqrt{5}}e^{-\frac{\sqrt{5}t}{\tau}}\right)e^{-\frac{3t}{2\tau}}}$

36/(b) u vaut E à l'instant initial et sa tangente est négative. Pour t très grand, u devient à nulle, on obtient donc l'allure suivante :



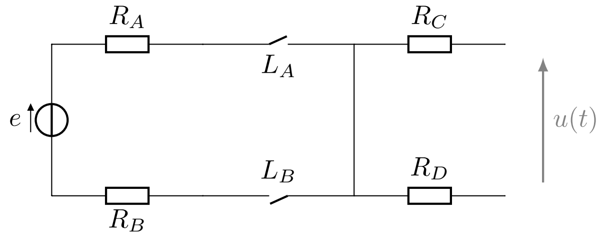
D) Filtre ADSL

37/ <u>BF :</u> condensateur $\Leftrightarrow$ interrupteur ouvert / bobine $\Leftrightarrow$ fil

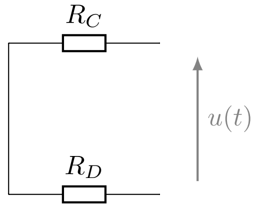


Les intensités sont nulles dans toutes les branches du circuit, les tensions aux bornes des résistances le sont donc aussi. On en déduit donc que $u(t)=e(t)$. Le filtre laisse passer.

<u>HF :</u> condensateur $\Leftrightarrow$ fil / bobine $\Leftrightarrow$ interrupteur ouvert



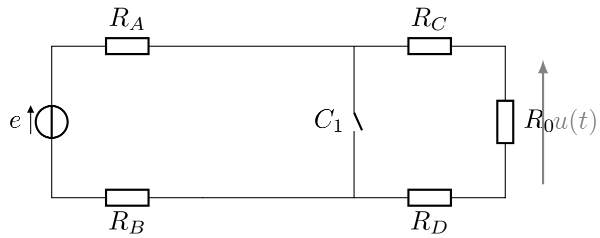
Ce circuit est équivalent à :



Ainsi, $u(t) = 0$

Le filtre est donc un filtre passe-bas.

38/ BF : condensateur ⇔ interrupteur ouvert / bobine ⇔ fil

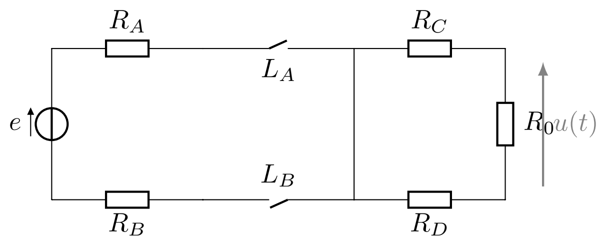


Un pont-diviseur de tension appliqué à R_0 donne :

$$u(t) = \frac{R_0}{4R + R_0} e(t) = \frac{600}{680} e(t) \approx 0,9e(t)$$

Le signal est légèrement atténué.

HF : bobine ⇔ interrupteur ouvert / condensateur ⇔ fil

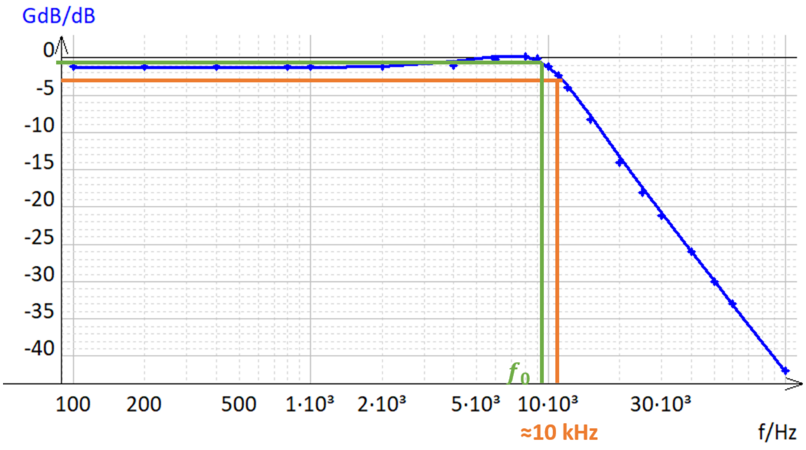


Le même raisonnement que précédemment nous permet d'obtenir à nouveau $u(t) = 0$.

Le filtre est toujours passe-bas mais en basses fréquences, il atténue un tout petit peu plus.

39/ Le diagramme de Bode correspond bien à un passe-bas. De plus, on mesure G_{dB} en basses fréquences et on obtient -1, ce qui correspond bien au gain de 0,9 obtenu en étude préliminaire.

40/ On repère la fréquence pour laquelle le gain du filtre vaut 3 dB de moins que le gain maximal qui vaut 0 ici :



On obtient ainsi : $f_c \approx 10.10^3$ Hz. Tous les signaux téléphoniques sont bien coupés, il ne reste que les signaux internet, super !

41/ Réponses :

41/(a) En basses-fréquences, la fonction de transfert se met sous la forme : $\underline{H}_{BF} = H_0$, le filtre est bien passant.

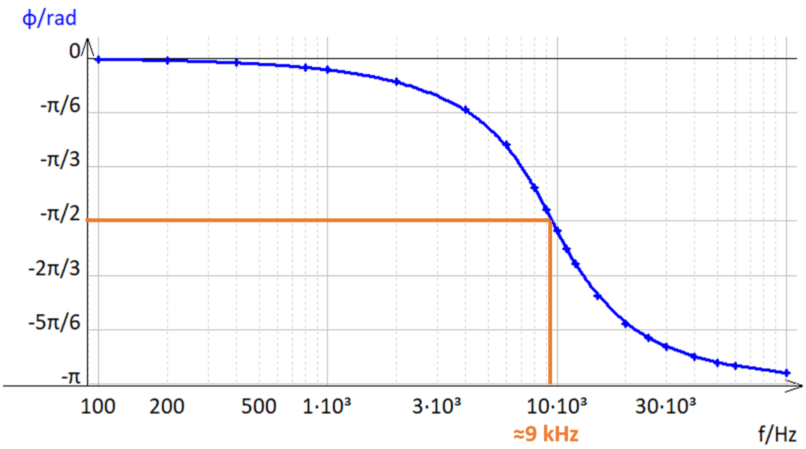
En hautes-fréquences, la fonction de transfert se met sous la forme : $\underline{H}_{HF} = -\dfrac{H_0 f_0^2}{f^2}$, le filtre coupe.

C'est bien cohérent avec une allure de passe-bas.

41/(b) La valeur de f_0 s'obtient en identifiant la fréquence pour laquelle la phase vaut $-\frac{\pi}{2}$. On mesure : $f_0 = 9$ kHz.

On sait de plus, qu'en basses fréquences $|\underline{H}| = H_0$, on mesure donc le gain en basses fréquences et obtient : $H_0 = 0,9$.

On sait enfin, qu'en f_0, $|\underline{H}| = H_0 Q$, on mesure : $G_{dB}(f_0) \approx -1$ dB. Ce gain est faiblement supérieur à H_0 mais il est difficile d'être plus précis. On considèrera donc que $Q \approx 1$.
C'est cohérent, car il y a une résonance et, pour un passe-bas du duexième ordre, il n'y a résonance que pour $Q > 1/\sqrt{2}$, c'est le cas ici.



41/(c) On l'a déjà dit plus haut, en effet, H_0 est en accord avec les valeurs des résistances.

42/ On se situe à $f = 50$ kHz $> f_c$, sur l'asymptote à -40 dB/décade.
Ainsi :

$$\underline{H} \sim -H_0 \frac{f_0^2}{f^2} = -H_0 \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$$

Soit :

$$\underline{u} = H_0 \omega_0^2 \times \frac{1}{\mathrm{j}\omega^2} \underline{e}$$

$u(t)$ est donc la double intégrale de $e(t)$ multipliée par $H_0 \omega_0^2$

Ainsi, si $e(t) = c$ est constante, alors $u(t) = H_0\omega_0^2 \times (\frac{c}{2}t^2 + D \times t + E)$ avec D et E deux réels constants.

On obtient donc des branches de paraboles telles que :

- si $c > 0$, alors la parabole est concave
- si $c < 0$, alors elle est convexe