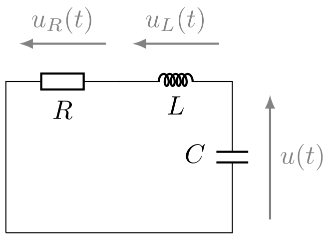
DS 5

Du fun, du fun et encore du fun

I- Étude d'un circuit RLC-série

Après fermeture de l'interrupteur, on a :

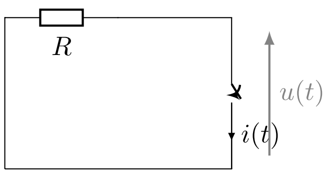


1/ À $t=0$ le condensateur est chargé, donc : $u(0^-)=E$.
L'interrupteur est ouvert donc : $i(0^-)=0$.

2/ Par continuité de la tension aux bornes du condensateur et de l'intensité traversant la bobine :

$$\boxed{u(0^+)=E} \quad \text{et} \quad i(0^+)=0 \quad \text{or, d'après la loi du condensateur} \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+)=\frac{i(0^+)}{C}=0}$$

3/ Pour $t\to+\infty$, le circuit devient :



On en déduit donc, comme le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert : $\boxed{i=0}$. Ainsi, d'après la loi d'Ohm et des mailles :

$$\boxed{u=0}$$

4/ D'après la loi des mailles et les lois caractéristiques des composants :

$$Ri+L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+u=0$$

Soit, d'après la loi du condensateur :

$$RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+LC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+u=0 \quad \text{soit} \quad \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{u}{LC}=0$$

Posons ω_0 et Q tels que :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2u=0} \quad \text{(E)}$$

Soit :

$$\begin{cases} \dfrac{\omega_0}{Q}=\dfrac{R}{L} \\[2ex] \omega_0^2=\dfrac{1}{LC} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} Q=\dfrac{L\omega_0}{R} \\[2ex] \omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}} \end{cases}}$$

5/ Le régime est apériodique pour $\boxed{Q<1/2}$. Pour cela, posons le polynôme caractéristique associé à (E) :

$$r^2+\frac{\omega_0}{Q}r+\omega_0^2=0$$

Le discriminant de ce polynôme est :

$$\Delta=\left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2-4\omega_0^2=\omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2}-4\right)$$

Ce discriminant est positif si et seulement si : $\frac{1}{Q^2}-4>0$ soit la condition énoncée précédemment.

6/ Les solutions de l'équation différentielle, qui est homogène, sont de la forme :

$$\boxed{u(t) = \exp\left(\frac{-\omega_0}{2Q}t\right)\left[A\exp\left(\Omega t\right) + B\exp\left(-\Omega t\right)\right]} \quad \text{où } \Omega = \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$$

7/ Les solutions de l'équation différentielle sont alors de la forme :

$$u(t) = \exp\left(\frac{-\omega_0}{2Q}t\right)\left[A\cos\left(\Omega' t\right) + B\sin\left(\Omega' t\right)\right] \quad \text{où } \Omega' = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

Dérivons cette grandeur :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) = -\frac{\omega_0}{2Q}\exp\left(\frac{-\omega_0}{2Q}t\right)\left[A\cos\left(\Omega' t\right) + B\sin\left(\Omega' t\right)\right] + \exp\left(\frac{-\omega_0}{2Q}t\right)\left[-\Omega' A\sin\left(\Omega' t\right) + \Omega' B\cos\left(\Omega' t\right)\right]$$

Les conditions initiales donnent alors le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{c} u(0) = E = A \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0) = 0 = -\dfrac{\omega_0}{2Q}A + \Omega' B \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} A = E \\ B = \dfrac{\omega_0}{2Q\Omega'}E = \dfrac{1}{2Q\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}E \end{array}\right.$$

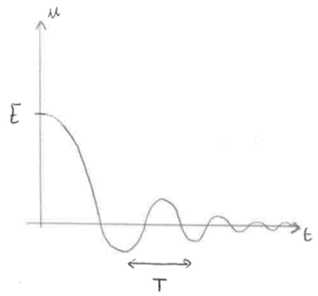
On en déduit donc l'expression suivante pour u :

$$\boxed{u(t) = E\exp\left(\frac{-\omega_0}{2Q}t\right)\left[\cos\left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}t\right) + \frac{1}{2Q\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}t\right)\right]}$$

8/ Par définition : $T = \frac{2\pi}{\Omega'}$ soit :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}}$$

9/ Ci-dessous :



10/ La loi des mailles donne :

$$u(t) + u_L(t) + u_R(t) = 0$$

Multiplions cette expression par i :

$$u(t)i(t) + u_L(t)i(t) + u_R(t)i(t) = 0$$

On obtient ainsi, en utilisant les lois de comportement des dipôles :

$$Cu(t)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) + Lu_L(t)\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t) + Ri^2(t) = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\mathrm{d}\frac{1}{2}Cu^2}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{\mathrm{d}\frac{1}{2}Li^2}{\mathrm{d}t}(t) + Ri^2(t)$$

On peut donc ainsi écrire, en posant $\mathscr{E}_C$ et $\mathscr{E}_L$ respectivement les énergies échangées par le condensateur et la bobine avec le circuit :

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_C}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_L}{\mathrm{d}t} + Ri^2 = 0$$

À l'instant initial, le condensateur est chargé. Toute l'énergie qu'il contient est échangée avec la bobine et la résistance.

11/ L'énergie échangée par le condensateur, ici en convention récepteur, est donnée par :

$$\Delta\mathscr{E}_C = \mathscr{E}_C(+\infty) - \mathscr{E}_C(0) = \frac{1}{2}Cu(+\infty) - \frac{1}{2}Cu(0) = -\frac{CE^2}{2}$$

Cette énergie est négative. C'est cohérent car le condensateur est ici un générateur étudié en convention récepteur.

12/ L'énergie échangée par la bobine, ici en convention récepteur, est donnée par :

$$\Delta\mathscr{E}_L = \mathscr{E}_L(+\infty) - \mathscr{E}_L(0) = \frac{1}{2}Li(+\infty) - \frac{1}{2}Li(0) = 0$$

Toute l'énergie contenue dans le condensateur est donc dissipée par effet Joule dans la résistance R.

II- Récupération d'énergie en discothèque (extrait de e3A PSI 2018

13/ La force de rappel du ressort est donnée par :

$$\overrightarrow{F}_r = -k(x - \ell_0)\vec{e}_x$$

car le ressort est de longueur x.

14/ Si la dalle est au repos, on peut lui appliquer le principe d'inertie, l'étudiant dans un référentiel galiléen. Les forces s'appliquant sur elle sont son poids $\overrightarrow{P} = -mg\vec{e}_x$, la force de rappel $\overrightarrow{F}_r$ et la force de frottement exercée par l'amortisseur $\overrightarrow{f} = -D\dot{x}$.

Ici, la dalle étant au repos, la force de frottement est nulle, on peut donc écrire :

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{F}_r = \vec{0} \quad \text{soit, en projetant sur } \vec{e}_x \quad -mg - k(x_{\text{éq}} - \ell_0) = 0$$

On en déduit donc l'expression suivante :

$$\boxed{x_{\text{éq}} = \ell_0 - \frac{mg}{k}}$$

$[x_{\text{éq}}] = [\ell_0] = L$ de plus, $[mg] = M.L.T^{-2} = [kx_{\text{éq}}$ donc : $[mg/k] = L$. Les dimensions sont cohérentes. Physiquement, on remarque que la position d'équilibre est décalée d'une quantité mg/k par rapport à ℓ_0, position d'équilibre si le ressort était posé à l'horizontale. Ce décalage est dû à la compression du ressort par la dalle sous l'effet de la gravité.

15/ Par le même raisonnement en n'étudiant plus la dalle comme système mais le système {dalle+danseur}, le principe d'inertie donne :

$$x'_{\text{éq}} = \ell_0 - \frac{(m+M)g}{k}$$

On obtient ainsi l'expression suivante pour le décalage :

$$\boxed{\delta = \frac{Mg}{k}}$$

16/ Prenons une masse de 70 kg pour l'adulte. D'après le constructeur, le décalage ne doit pas dépasser quelques millimètres. Prenons $\delta = 1$ cm, on obtient ainsi :

$k = 69\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$ une valeur minimale de raideur permettant d'éviter toute gêne pour le danseur.

17/ Appliquons le principe fondamental de la dynamique à la dalle :

$$m\vec{a} = \overrightarrow{F_r} + \overrightarrow{P} + \overrightarrow{f} + \overrightarrow{F} + \overrightarrow{F_\alpha}$$

En projetant sur $\vec{e}_x$ et en rappelant que $\vec{a}.\vec{e}_x = \ddot{x}$ et $\vec{v}.\vec{e}_x = \dot{x}$, on obtient :

$$m\ddot{x} = -k(x - \ell_0) - mg - D\dot{x} - \alpha\dot{x} + \overrightarrow{F}.\vec{e}_x$$

Soit, en posant $F = overrightarrowF.\vec{e}_x$:

$$\ddot{x} + \frac{D+\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = -g\frac{k}{m}\ell_0 + \frac{F}{m}$$

Posons $X = x - x_{\text{éq}}$, soit $x = X + x_{\text{éq}}$ et $\dot{x} = \dot{X}$ et $\ddot{x} = \ddot{X}$, on obtient ainsi :

$$\ddot{X} + \frac{D+\alpha}{m}\dot{X} + \frac{k}{m}X = \frac{F}{m}$$

On peut donc identifier : $\boxed{a_0 = \frac{k}{m}}$ et $\boxed{b_0 = \frac{F}{m}}$.

18/ L'équation différentielle est linéaire, le système modélisé l'est donc également.

19/ Impédance complexe de la résistance : $\underline{Z}_R = R$
Impédance complexe de la bobine : $\underline{Z}_L = \mathrm{j}\omega L$

20/ En dansant, on peut estimer la fréquence des pas d'un danseur à 0,5 Hz, ce qui donne : $\omega \approx 3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

21/ Le constructeur affirme qu'il est possible de négliger l'influence de la bobine. Il faut, pour s'en assurer, comparer les modules des impédances, or $|\underline{Z}_L| = \omega L$ soit numériquement :

$$|\underline{Z}_L| = 5,2 \text{ m}\Omega \ll R$$

Il est donc légitime d'effectuer cette approximation.

22/ Dans ce cadre, on se retrouve avec un pont diviseur de tension qui, appliqué à R_L donne :

$$\boxed{v = \frac{R_L}{R+R_L}u}$$

23/ Par définition,la puissance électrique instantanée reçue par le réseau de LED correspond à :

$$P_L(t) = v(t) \times i(t) = \frac{R_L}{R+R_L}u \times i \quad \text{d'après la question précédente}$$

Or, par loi d'Ohm, cela donne :

$$P_L(t) = \frac{R_L}{(R+R_L)^2}u^2$$

De plus, d'après l'énoncé : $u = K_t\Omega = K_t\gamma\dot{x}$, on en déduit donc :

$$P_L(t) = A|K_t\gamma\dot{x}|^2$$

En posant $\boxed{A = \frac{R_L}{(R+R_L)^2}}$

24/ Par définition, $P_u(t) = u.i$ et $i = \frac{v}{R_L} = \frac{u}{R+R_L}$, on peut donc écrire :

$$P_u(t) = \frac{u^2}{R+R_L} = \frac{(K_t\gamma\dot{x})^2}{R+R_L}$$

De plus, d'après la définition du rendement :

$$P_v(t) = \frac{P_u(t)}{\eta} = \frac{(K_t\gamma\dot{x})^2}{\eta(R+R_L)}$$

25/ L'application numérique donne :

$$\alpha = 3,0.10^4 \text{ N} \cdot \text{sm}^{-1}$$

La valeur de α est donc très supérieure à D, l'amortissement électrique est donc bien plus fort que l'amortissement mécanique, on peut négliger ce dernier comme dit dans le commentaire du constructeur.

26/ ω_0 est de dimension inverse au temps, il caractérise la pulsation des oscillations si le système était un oscillateur harmonique. On la nomme, pulsation propre.
Q est sans dimension et caractérise le degré d'amortissement du système. Plus Q est élevé, moins le système est amorti. On le nomme facteur de qualité.

27/ La solution particulière est donnée par le second membre et vaut $\frac{F_0}{k}$.

28/ $\dot{x} = \dot{X}$, on en déduit donc, en dérivant :

$$\dot{x}(t) = -\frac{F_0}{k(1-Q^2)}\left(-\omega_0 Q e^{-\omega_0 Q t} + Q^2\frac{\omega_0}{Q}e^{-\omega t/Q}\right) \quad \text{soit} \quad \boxed{\dot{x}(t) = \frac{F_0\omega_0 Q}{k(1-Q^2)}\left(e^{-\omega_0 Q t} - e^{-\omega t/Q}\right)}$$

29/ Le régime est apériodique. En effet, les solutions de l'équation homogène sont sous la forme d'une combinaison linéaire d'exponentielles. De plus, le calcul de Q donne 0,08, ce qui est plus faible que 1/2.

Calculons :
$$X(0) = \frac{F_0}{k}\left[1 - \frac{1-Q^2}{1-Q^2}\right] = 0 \quad \text{et} \quad \dot{X}(0) = \frac{F_0\omega_0 Q}{k(1-Q^2)}(1-1) = 0$$
A l'instant initial, la dalle était bien à sa position d'équilibre et immobile.

30/ D'après la question, on sait que :
$$P_L(t) = A|K_t\gamma\dot{x}|^2 = AK_t^2\gamma^2\left(\frac{F_0\omega_0 Q}{k(1-Q^2)}\right)^2\left(e^{-\omega_0 Qt} - e^{-\omega t/Q}\right)^2$$
Ainsi, en posant K qui contient tout le facteur, mis à part F_0^2 on obtient bien :
$$\boxed{P_L(t) = KF_0^2\left(e^{-\omega_0 Qt} - e^{-\omega t/Q}\right)^2}$$

31/ Les durées caractéristiques d'évolution des deux équations différentielles sont :
$$\tau_g = \frac{1}{\omega_0 Q} \quad \text{et} \quad \tau_d = \frac{Q}{\omega_0}$$
Or, $Q \approx 0,08$ donc $\dfrac{1}{Q} \gg Q$, on en déduit donc que $\tau_d \ll \tau_g$.

L'exponentielle de droite converge donc plus vite que celle de gauche. Ainsi, aux temps longs, il ne reste que celle de gauche, on peut donc poser $\boxed{\tau = \tau_g = \dfrac{1}{2\omega_0 Q}}$ (le terme 2 venant du carré).

32/ La courbe en traits pleins est la consigne, c'est donc F_0 et celle en pointillés est donc $P_L(t)$.
Les forces sont appliquées :

- entre 1,3 et 1,6 s pour une valeur de 1600 N pour F_0
- entre 2,6 et 3,0 s pour une valeur de 800 N pour F_0
- entre 4,2 et 4,8 s pour une valeur de 400 N pour F_0

33/ On remarque que $P_L(t)$ acquiert une valeur dès que F_0 suit un échelon. Pour passer de 0 à une valeur non nulle, ou bien l'inverse. C'est bien cohérent avec le texte.

On a vu précédemment que la forme des solutions pour $P_L(t)$ s'atténuent avec le temps, c'est donc logique qu'en présence de F_0 elle finisse par être nulle.
Physiquement, on peut se rendre compte que $\dot{x}$ tend vers 0, le système évolue vers une position d'équilibre.

34/ Sur la question 30/, on remarque que la puissance P_L est liée de manière quadratique à F_0 (F_0^2).

On observe sur le graphique qu'entre deux pics, la force est divisée par 2, or, on remarque que la puissance, elle, est divisée par 4. C'est donc bien cohérent avec ce qu'on attend, une évolution quadratique.

35/ À part pour le premier échelon, τ semble constant. Graphiquement, on obtient : $\tau \approx 0,5$ s. Numériquement, on obtient : $\tau \approx 0,1$ s. Les deux résultats sont du même ordre de grandeur.

36/ Sur la figure 4, on peut estimer l'amplitude à 800 N, la valeur moyenne à 1000 N et on peut mesurer $5T = 1,7$ s avec T la période du signal. On en déduit donc, en utilisant $\omega = 2\pi/T$:
$$\boxed{F_0 = 1000\text{ N} \quad F_1 = 800\text{ N} \quad \omega = 18,5\text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}}$$

37/ L'équation différentielle peut être passée en complexes sachant que l'excitation est sinusoïdale, on obtient donc :
$$\underline{\ddot{X}} + \frac{\omega_0}{Q}\underline{\dot{X}} + \omega_0^2\underline{X} = \frac{F_1}{m}e^{\omega t+\varphi}$$
En utilisant les propriétés des complexes sur les dérivées, on en déduit :
$$(\mathrm{j}\omega)^2\underline{X} + \frac{\omega_0}{Q}\mathrm{j}\omega\underline{X} + \omega_0^2\underline{X} = \frac{F_1}{m}e^{\omega t+\varphi}$$

D'où, en factorisant par $\underline{X}$:

$$\underline{X} = \frac{\frac{F_1}{m}e^{\omega t+\varphi}}{(\mathrm{j}\omega)^2 + \dfrac{\mathrm{j}\omega\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$

Divisons par ω_0^2, soit :

$$\underline{X} = \frac{\frac{F_1}{m\omega_0^2}e^{\omega t+\varphi}}{1 + \dfrac{\mathrm{j}\omega}{Q\omega_0} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

On obtient ainsi :

$$\boxed{X_0 = |\underline{X}| = \frac{\frac{F_1}{m\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}}$$

38/ Par définition, $\dot{X} = \dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}$ donc $\underline{\dot{X}} = \mathrm{j}\omega\underline{X}$ et V_0 est l'amplitude de $\dot{X}$ donc :

$$\boxed{V_0 = |\underline{\dot{X}}| = |\mathrm{j}\omega\underline{X}| = \omega X_0}$$

39/ On a :

$$\langle P_L \rangle = \frac{(\eta F_1 K_t)^2 R_L \gamma^2}{2K_t^4\gamma^4 + 2\eta^2 km(R+R_L)^2\left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right]^2}$$

<u>Analyse fréquentielle :</u>

À basses fréquences : $\omega \ll \omega_0$, ainsi :

$$2K_t^4\gamma^4 + 2\eta^2 km(R+R_L)^2\left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right]^2 \sim 2\eta^2 km(R+R_L)^2\left[-\frac{\omega_0}{\omega}\right]^2 \sim \frac{2\eta^2 km(R+R_L)^2\omega_0^2}{\omega^2}$$

$$\langle P_L \rangle \sim \frac{(\eta F_1 K_t)^2 R_L \gamma^2}{2\eta^2 km(R+R_L)^2\omega_0^2}\omega^2 \to 0$$

En statique, aucune puissance n'est fournie par la dalle (logique... et cohérent avec la partie précédente).

À hautes fréquences : $\omega \gg \omega_0$, ainsi :

$$2K_t^4\gamma^4 + 2\eta^2 km(R+R_L)^2\left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right]^2 \sim 2\eta^2 km(R+R_L)^2\left[\frac{\omega}{\omega_0}\right]^2 \sim \frac{2\eta^2 km(R+R_L)^2\omega^2}{\omega_0^2}$$

$$\langle P_L \rangle \sim \frac{(\eta F_1 K_t)^2 R_L \gamma^2\omega_0^2}{2\eta^2 km(R+R_L)^2}\frac{1}{\omega^2} \to 0$$

À hautes fréquence, la dalle ne suit plus les mouvements du danseur.

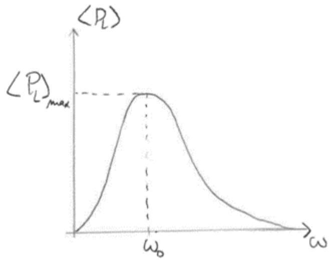
<u>Pulsation du maximum :</u> Pour maximiser $\langle P_L \rangle$ en fonction de ω, il faut minimiser son dénominateur car c'est le seul qui dépend de ω.
Pour minimiser $2K_t^4\gamma^4 + 2\eta^2 km(R+R_L)^2\left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right]^2$, comme les deux termes sont positifs, il suffit de rendre le terme de droite nul, soit :

$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{\omega = \omega_0}$$

On en déduit :

$$\boxed{\langle P_L \rangle_{\max} = \langle P_L \rangle(\omega_0) = \frac{(\eta F_1 K_t)^2 R_L \gamma^2}{2K_t^4\gamma^4} = \frac{\eta^2 F_1^2 R_L}{2K_t^2\gamma^2}}$$

On obtient alors le tracé suivant :



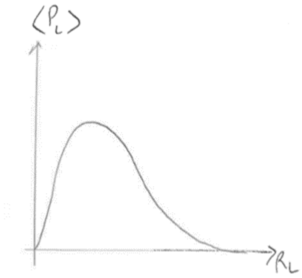
40/ Calculons les pulsations correspondantes $\omega_1 = 12$ rad/s et $\omega_2 = 13$ rad/s. On remarque que $\omega_1 < \omega_2 < \omega_0$. D'après la réponse précédente, l'équipe 1 produit un peu moins d'énergie que l'équipe 2.

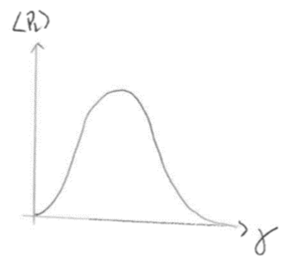
41/

42/ On peut, en fixant les autres grandeurs, noter la puissance moyenne ainsi :

$$\langle P_L \rangle = \frac{A\gamma^2}{B\gamma^4 + C} \quad \text{et} \quad \langle P_L \rangle = \frac{DR_L}{E + FR_L^2}$$

avec A, B, C, D, E et F des constantes qu'on ne cherche pas à expliciter. On fait seulement apparaître ici les dépendances en γ et R_L respectivement. On en déduit, par un raisonnement à basses et hautes fréquences, les tracés suivants :



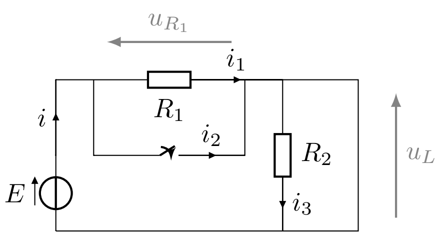


43/ Sur la figure 7, on observe bien que $\langle P_L \rangle$ augmente puis diminue avec γ quelle que soit la valeur de R_L fixé.
Pour l'évolution avec R_L, c'est moins clair, on observe bien une augmentation à faible R_L mais on n'a pas d'informations pour la suite.

44/ On cherche à maximiser $\langle P_L \rangle$, on choisit donc, d'après le graphique le couple $R_L = 300\ \Omega$ et $\gamma = 2.10^4$ rad $\cdot$ m^{-1}.

III- Circuit R²LC du kiff

1/ L'interrupteur étant fermé depuis très longtemps, on peut donner le circuit équivalent suivant :

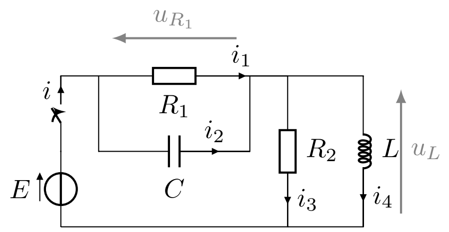


La bobine équivaut à un fil donc $u_L = 0$. D'après la loi des mailles $\boxed{u_{R_1} = E}$.

2/ Par définition, cette puissance est donnée par :

$$P_2 = u_L \times i_3 = 0 \quad \text{car } u_L \text{ est nul}$$

3/ On obtient le circuit suivant :



La loi des nœuds donne $i_1 + i_2 = i_3 + i_4 = 0$, d'après les lois des dipôles :

$$u_{R_1} = R_1 i_1 \quad \text{et} \quad u_{R_2} = R_2 i_3 \quad \text{et} \quad u_L = L\frac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t} \quad \text{et} \quad i_2 = C\frac{\mathrm{d}u_{R_1}}{\mathrm{d}t}$$

On en déduit donc :

$$\frac{u_{R_1}}{R_1} + C\frac{\mathrm{d}u_{R_1}}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \text{et, en dérivant la deuxième loi des nœuds} \quad \frac{u_L}{L} + \frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}\frac{1}{R_2} = 0$$

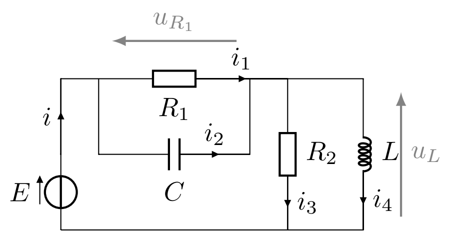
On obtient deux équations différentielles du premier ordre indépendantes l'une de l'autre.

4/ Le condensateur et la bobine sont donc en régime libre...

5/ En régime permanent, les équations différentielles nous donnent les valeurs finales de u_L et u_{R_1}, c'est le second membre. Elles sont toutes les deux nulles.

6/ Les constantes de temps ne sont pas les mêmes, pour le circuit RC, la constante de temps est R_1C, l'application numérique donne : 0,4 ms. Pour le circuit RL, elle est L/R, ce qui donne : 2 µs. Le régime transitoire sera donc atteint dans le circuit RL en premier.

7/ Le circuit d'étude est le suivant :



La loi des nœuds donne : $i = i_1 + i_2 = i_3 + i_4$, d'après les lois des dipôles :

$$u_{R_1} = R_1 i_1 \quad \text{et} \quad u_{R_2} = R_2 i_3 \quad \text{et} \quad u_L = L\frac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t} \quad \text{et} \quad i_2 = C\frac{\mathrm{d}u_{R_1}}{\mathrm{d}t}$$

Ainsi, en dérivant la loi des nœuds :

$$\frac{\mathrm{d}u_{R_1}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{R_1} + C\frac{\mathrm{d}^2u_{R_1}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}\frac{1}{R_2} + \frac{u_L}{L}$$

Or, d'après la loi des mailles : $E = u_{R_1} + u_L$:

$$-\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}\frac{1}{R_1} - C\frac{\mathrm{d}^2u_L}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}\frac{1}{R_2} + \frac{u_L}{L}$$

Ainsi, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}^2u_L}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}\frac{1}{CR_2} + \frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}\frac{1}{CR_1} + \frac{u_L}{LC} = 0$$

On pose ω_0 et Q tels que :

$$\frac{\mathrm{d}^2u_L}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}\frac{\omega_0}{Q} + u_L\omega_0^2 = 0$$

Soit : $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\sqrt{\frac{C}{L}}$

8/(a) Par continuité de la tension aux bornes du condensateur $u_{R_1}(0^+) = 0$, on en déduit, par loi des mailles :

$$\boxed{E = u_L(0^+)}$$

8/(b) Avant fermeture de l'interrupteur, $i(0^-) = 0$, de plus, comme le système est en régime permanent, la bobine est équivalente à un fil, donc $u_L(0^-) = 0$. D'après la loi d'Ohm, $i_3(0^-) = 0$, donc $i_4(0^-) = 0$ par loi des nœuds.

Par continuité de l'intensité circulant dans la bobine, $i_4(0^+) = 0$. D'après la loi des nœuds, on en déduit que $i(0^+) = i_3(0^+) = \dfrac{u_L(0^+)}{R_2} = \dfrac{E}{R_2}$.

De plus, d'après la loi du condensateur, $\frac{\mathrm{d}u_{R_1}}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{i_2(0^+)}{C} = \frac{i(0^+)-i_1(0^+)}{C}$ d'après la loi des nœuds.

$u_{R_1}(0^+) = 0$ donc $i_1(0^+) = 0$ d'après la loi d'Ohm.

Enfin, par loi des mailles dérivée :

$$\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}(0^+) = -\frac{\mathrm{d}u_{R_1}}{\mathrm{d}t}(0^+) = -\frac{i(0^+)}{C} = -\frac{E}{R_2C}$$

9/ L'application numérique du facteur de qualité donne : $Q = 6,4$. Ce facteur de qualité est supérieur à 1/2, le régime est donc pseudo-périodique. Les solutions de l'équation sont donc de la forme :

$$u_L(t) = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\left(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t\right) \quad \text{où} \quad \Omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$$

Dérivons cette grandeur :

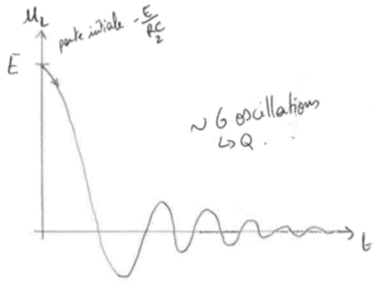
$$\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}(t) = -\frac{\omega_0}{2Q}\exp\left(\frac{-\omega_0}{2Q}t\right)\left[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right] + \exp\left(\frac{-\omega_0}{2Q}t\right)\left[-\Omega A\sin(\Omega t) + \Omega B\cos(\Omega t)\right]$$

Les conditions initiales donnent alors le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{c} u_L(0) = E = A \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0) = -\frac{E}{R_2C} = -\dfrac{\omega_0}{2Q}A + \Omega B \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} A = E \\ B = E\left(\dfrac{\omega_0}{2Q\Omega} - \dfrac{1}{R_2C\Omega}\right) = E\left(\dfrac{1}{2Q\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} - \dfrac{1}{R_2C\Omega}\right) \end{array}\right.$$

On en déduit ainsi l'expression suivante pour la tension aux bornes de la bobine :

$$\boxed{u_L(t) = E\exp\left(\frac{-\omega_0}{2Q}t\right)\left[\cos\left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}t\right) + \left(\frac{1}{2Q\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} - \frac{1}{R_2C\Omega}\right)\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}t\right)\right]}$$

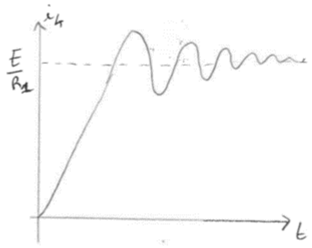


10/

11/ L'intensité i_4 est nulle à l'instant initial. En régime continu, la bobine est équivalente à un fil, la tension u_L est donc nulle et d'après la loi des mailles $u_{R_1} = E$ et $i_3 = 0$ par loi d'Ohm.
Le condensateur est équivalent à un fil donc $i_2 = 0$ donc $i = i_4 = i_1$ d'après la loi des nœuds. Enfin, d'après la loi d'Ohm appliquée à R_1 :

$$i_4 = \frac{E}{R_1}$$

Les oscillations de i_4 sont de la même forme que celles de u_L, d'où l'allure suivante.



12/ On peut considérer que le terme exponentiel contrôle la rapidité du système, le temps caractéristique d'évolution τ est donc donné par $\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0}$. L'application numérique donne : $\tau = 0,6$ ms. Comparé à la durée d'évolution de u_L lors du régime libre qui vaut 2 μs, cette durée caractéristique est très élevée (rapport 300 environ).
On peut donc en déduire qu'en ouvrant l'interrupteur, la tension et l'intensité circulant dans la bobine s'annulent quasiment instantanément par rapport à la durée d'évolution du système en réponse indicielle.