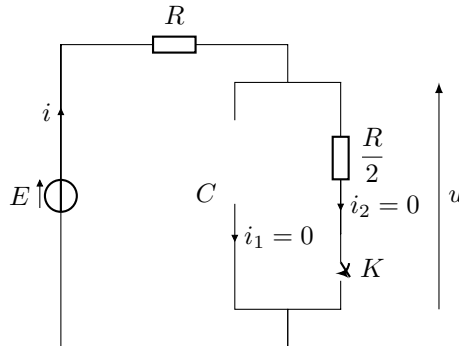


1er ordre

I- Circuit RC

1/ L'interrupteur est ouvert, donc $i_2(0^-) = 0$

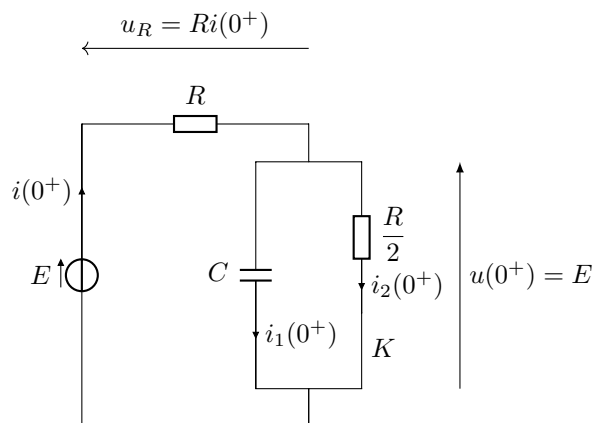


Le circuit fonctionne en régime permanent, donc le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert, donc $i_1(0^-) = 0$

La loi des nœuds donne donc $i(0^-) = 0$

La loi des mailles permet alors d'écrire : $u(0^-) + Ri(0^-) = E$, soit $u(0^-) = E$

2/ La tension u est aux bornes du condensateur et ne peut pas subir de discontinuité, donc $u(0^+) = u(0^-) = E$



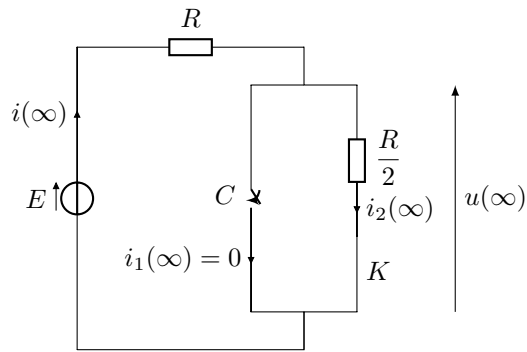
La loi des mailles à $t = 0^+$ permet d'écrire $u(0^+) + Ri(0^+) = E$, donc $i(0^+) = 0$

Loi d'Ohm aux bornes de $\frac{R}{2}$: $u(0^+) = \frac{R}{2}i_2(0^+)$, donc $i_2(0^+) = \frac{2E}{R}$

La loi des nœuds donne alors $i_1(0^+) = -i_2(0^+)$

Ainsi $i_1(0^+) = -\frac{2E}{R}$

3/ Au bout d'un temps très long, le régime permanent est atteint, alors le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert, donc $i_1(\infty) = 0$



Les résistances R et $\frac{R}{2}$ sont en série, on peut utiliser la relation du pont diviseur de tension : $u(\infty) =$

$$\frac{R/2}{R/2 + R}E, \text{ soit } \boxed{u(\infty) = \frac{E}{3}}$$

Loi d'Ohm pour $\frac{R}{2}$: $\boxed{i_2(\infty) = \frac{2u(\infty)}{R} = \frac{2E}{3R}}$

La loi des nœuds donne alors $\boxed{i(\infty) = i_2(\infty) = \frac{2E}{3R}}$

4/ Les courbes 1 et 3 se rejoignent pour t grand, donc ce sont les courbes de i et i_2 .

La courbe 2 tend vers 0, donc c'est la courbe de i_1 .

i évolue de 0 à $\frac{2E}{3R} > 0$: c'est la courbe 1

i_1 évolue de $-\frac{2E}{R} < 0$ à 0 : c'est la courbe 2

i_2 évolue de $\frac{2E}{R} > 0$ à $\frac{2E}{3R} < i_2(0^+)$: c'est la courbe 3

5/ La loi des mailles donne : $u + Ri = E$

Or, la loi des nœuds donne : $i = i_1 + i_2$, donc $u + R(i_1 + i_2) = E$

Par ailleurs, la loi d'Ohm donne $u = \frac{R}{2}i_2$ et la loi du condensateur : $i_1 = C \frac{du}{dt}$.

Ainsi, $u + R \left(C \frac{du}{dt} + \frac{2u}{R} \right) = E$

Soit $3u + RC \frac{du}{dt} = E$, soit $\boxed{\frac{du}{dt} + \frac{3}{RC}u = \frac{E}{RC}}$

On identifie τ tel que : $\frac{1}{\tau} = \frac{3}{RC}$, donc $\boxed{\tau = \frac{RC}{3}}$

Alors l'équation différentielle devient $\boxed{\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{E}{3\tau}}$

6/ L'ensemble des solutions de l'équation homogène est $u_H(t) = \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

UNE solution particulière est $u_P = \frac{E}{3}$

Ainsi $u(t) = \lambda e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{3}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Or à $t = 0$, $u(0) = E$, donc $\lambda + \frac{E}{3} = E$, soit $\lambda = \frac{2E}{3}$

Ainsi $\boxed{u(t) = \frac{E}{3} \left(1 + 2e^{-\frac{t}{\tau}} \right)}$

7/ La tension donnée sur la courbe 3 diverge avec le temps, on la rejette donc.

La courbe 1 donne une tension négative alors qu'on vient d'établir une loi positive pour la tension u . On la rejette également.

La courbe 2 semble convenir dans la mesure où la tension suit une exponentielle décroissante dont l'asymptote n'est pas nulle. De plus, la tension est divisée par 3 entre sa valeur initiale et sa valeur finale.

8/ On sait qu'au bout d'une durée égale à τ la tension atteint 63% de sa variation finale. La variation finale de la tension est ici de 3 V, on cherche donc l'instant auquel la tension vaut 1,9 V. Le tracé sur l'annexe nous permet d'obtenir $\tau = 10 \mu\text{s}$.

9/ D'après la loi d'Ohm : $i_2(t) = \frac{u}{R}$, soit $i_2(t) = \frac{2E}{3R} \left(1 + 2e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

Par ailleurs, d'après la relation du condensateur :

$$i_1(t) = C \frac{du}{dt} = \frac{-2CE}{3\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{-2CE}{3\frac{RC}{3}} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

soit $i_1(t) = -\frac{2E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$

Enfin, d'après la loi des nœuds :

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = -\frac{2E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{2E}{3R} \left(1 + 2e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \frac{2E}{R} \left(-e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \frac{2E}{R} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Soit $i(t) = \frac{2E}{3R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

10/ Initialement, le condensateur contient une énergie $E_i = \frac{1}{2}C(u(0))^2 = \frac{1}{2}CE^2$

À la fin du régime transitoire, le condensateur contient l'énergie $E_f = \frac{1}{2}C(u(\infty))^2 = \frac{1}{2}C\frac{E^2}{3^2}$

Ainsi le condensateur a fourni au circuit $E_{fournie} = E_i - E_f = \frac{1}{2}CE^2 - \frac{1}{9}CE^2 = \frac{7}{18}CE^2$

$E_{fournie} = \frac{7}{18}CE^2$

II- Des bulles de champagne pour Noël

11/ Le poids de la bulle de champagne a pour norme $P = mg = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{gaz} g$.

Comme toute la bulle est immergée, la poussée d'Archimède a pour norme $\Pi = -\rho_{liq} \frac{4}{3}\pi r^3 g$.

Ainsi, le rapport des deux forces est $\frac{P}{\Pi} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{gaz} g}{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{liq} g} = \frac{\rho_{gaz}}{\rho_{liq}} = \frac{1}{1000} \ll 1$.

On peut donc négliger le poids devant la poussée d'Archimède pour la bulle.

12/ La bulle (notre système) est soumise à :

- poussée d'Archimède $\vec{\Pi} = -\rho_{liq} V \vec{g} = \rho_{liq} \frac{4}{3}\pi r^3 g \vec{e}_z$

- force de Stokes $\vec{f} = -6\pi\eta r \vec{v} = -6\pi\eta r v_z \vec{e}_z$

On étudie la bulle dans un référentiel galiléen, on peut donc lui appliquer le principe fondamental de la dynamique :

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{gaz} \vec{a} = \rho_{liq} \frac{4}{3}\pi r^3 g \vec{e}_z - 6\pi\eta r v_z \vec{e}_z$$

avec \vec{a} le vecteur accélération de la bulle. Or, par définition, $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

On le projette sur \vec{e}_z : $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{gaz} \frac{dv_z}{dt} = \rho_{liq} \frac{4}{3}\pi r^3 g - 6\pi\eta r v_z$

On a donc

$$\frac{dv_z}{dt} + \frac{9\eta}{2r^2 \rho_{gaz}} v_z = \frac{\rho_{liq}}{\rho_{gaz}} g$$

On peut alors identifier :

$$\tau = \frac{2r^2 \rho_{gaz}}{9\eta} \quad \text{et} \quad \frac{v_{lim}}{\tau} = \frac{\rho_{liq}}{\rho_{gaz}} g, \quad \text{d'où} \quad v_{lim} = \frac{2r^2 \rho_{liq} g}{9\eta}$$

13/ On a une équation différentielle du premier ordre.

Tout d'abord, on résout l'équation différentielle homogène associée : $\frac{dv_z}{dt} + \frac{v_z}{\tau} = 0$, qui admet l'ensemble des solutions de la forme $v_{z,h}(t) = \lambda \exp(-t/\tau)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

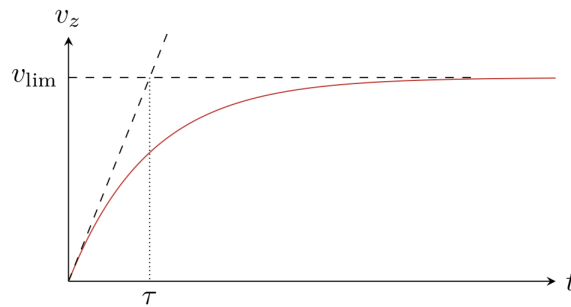
Par ailleurs, v_{lim} est une solution particulière.

Donc $v_z(t) = \lambda \exp(-t/\tau) + v_{lim}$.

Pour déterminer λ , on sait que $v_z(0) = 0$. Ainsi, $\lambda = -v_{lim}$.

Au final

$$v_z(t) = v_{lim} (1 - \exp(-t/\tau))$$



Vitesse de la bulle au cours du temps

v_{lim} représente la vitesse finale atteinte par la bulle en régime permanent et τ l'ordre de grandeur du temps nécessaire pour l'atteindre.

- 14/ On a $\tau = \frac{2 \cdot 10^{-6} \times 1}{9 \times 10^{-3}} \simeq 2.10^{-4}$ s, ce qui est bien plus faible que le temps que met la bulle à remonter dans la flûte, de l'ordre de 1s. On peut donc négliger la durée du transitoire et considérer que la bulle est à tout instant en régime permanent où $v_z = v_{lim}$.
- 15/ Comme l'émission est périodique de période T , choisir $f_b = 1/T$ permet d'observer une multitude de bulles, mais dont les positions correspondent aux positions successives d'une même bulle espacées temporellement de multiples de T . L'ensemble va apparaître fixe.
- 16/ La bulle parcourt la distance $h_{n+1} - h_{n-1}$ en une durée égale à deux périodes $T = 1/f_b$. Ainsi, en assimilant vitesse moyenne et vitesse instantanée,

$$v_n = \frac{h_{n+1} - h_{n-1}}{2/f_b} = f_b \frac{h_{n+1} - h_{n-1}}{2} \simeq 20 \frac{1,5}{2} = 15 \text{ mm/s}$$

- 17/ L'allure des bulles sur la photographie n'est pas en accord avec l'hypothèse de vitesse constante : si c'était le cas, les positions successives seraient régulièrement espacées. L'expression établie précédemment de la vitesse limite montre qu'elle dépend du rayon de la bulle ... or on constate sur la photographie que le rayon des bulles augmente lorsqu'elles remontent dans la flûte. C'est probablement cette variation de rayon qui est responsable des variations de vitesse.

- 18/ On a montré précédemment que la vitesse limite valait $v_{lim} = \frac{2r^2 \rho_{liq} g}{9\eta}$, donc en prenant le logarithme :

$$\log(v_{lim}) = \log\left(\frac{2\rho_{liq}g}{9\eta}\right) + \log(r^2), \text{ soit } \log(v_{lim}) = 1 + 2 \log(r), \text{ avec } A \text{ une constante car le premier terme de la somme est constant.}$$

L'interprétation de la figure est plus délicate : il faut remarquer que les échelles n'y sont pas linéaires, c'est-à-dire que les graduations ne sont pas « régulièrement » espacées. Il s'agit en fait d'une échelle dite logarithmique, que nous introduirons dans le chapitre sur le filtrage. La courbe de la figure représente donc en fait $\log v_{lim}$ en fonction de $\log r$. On peut alors constater que tous les points expérimentaux se regroupent sur une droite, dont on peut estimer la pente à environ 2.

III- Bille dans une gouttière

A) Gouttière horizontale

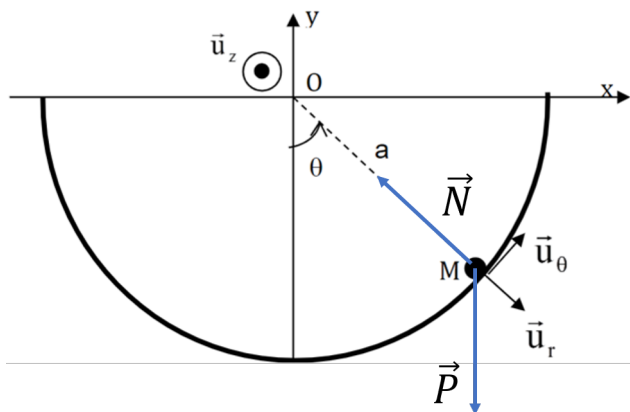
- 19/ Le mouvement de la bille se fait dans un hémicylindre. Celle-ci reste donc à distance constante de l'axe (Oz) au cours du mouvement, dans ce cas, l'utilisation d'un repère cylindrique est pertinente.
- 20/ En coordonnées cylindriques, on a :

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z$$

Or, ici, $r = a$ est une constante donc :

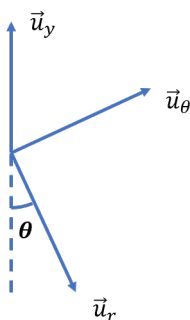
$$\boxed{\vec{v} = a\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{a} = -a\dot{\theta}^2\vec{e}_r + a\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z}$$

- 21/ La bille est soumise à son poids \vec{P} ainsi qu'à la réaction de la gouttière. Cette réaction se limite à sa composante normale \vec{N} car les frottements ont été négligés :



On a directement : $\vec{N} = -N\vec{e}_r$ avec N la composante radiale de \vec{N} .

Pour le poids c'est un peu plus compliqué. L'expression du poids est $\vec{P} = m\vec{g}$ avec $\vec{g} = -g\vec{u}_y$. Il nous faut donc projeter le vecteur \vec{u}_y dans la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ (je détaille cette étape car elle sera très utile plus tard) :



On obtient : $\vec{u}_y = -\cos\theta\vec{u}_r + \sin\theta\vec{u}_\theta$, soit :

$$\vec{P} = mg(\cos\theta\vec{u}_r - \sin\theta\vec{u}_\theta)$$

22/ Aucune force n'est dirigée selon \vec{u}_z , on en déduit, d'après le principe d'inertie que le mouvement de la bille selon cette direction est rectiligne uniforme. Comme la bille n'a pas de vitesse initiale, elle est immobile selon cette direction (Oz), son mouvement est donc restreint au plan (xOy) .

23/ Appliquons le principe fondamental de la dynamique à la bille étudiée dans un référentiel galiléen :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N}$$

Projetons cette équation sur \vec{u}_θ , nous obtenons :

$$m\vec{a}\vec{u}_\theta = -mg\sin\theta \quad \text{soit} \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{a}\sin\theta = 0 \quad (E)$$

24/ Multiplions (E) par $\dot{\theta}$, cela donne :

$$\dot{\theta} \times \ddot{\theta} + \dot{\theta} \times \frac{g}{a}\sin\theta = 0$$

En intégrant entre 0 et t, nous obtenons :

$$\frac{\dot{\theta}^2(t)}{2} - \frac{\dot{\theta}^2(0)}{2} - \frac{g}{a}(\cos\theta(t) - \cos\theta(0)) = 0$$

Or, la vitesse étant lancée sans vitesse initiale d'un angle θ_0 , on peut donc en déduire l'expression suivante :

$$\dot{\theta}^2(t) = \frac{2g}{a}(\cos\theta(t) - \cos\theta_0)$$

25/ L'équation (E) projetée sur \vec{u}_r donne :

$$-ma\dot{\theta}^2 = -N + mg \cos \theta$$

En remplaçant par l'expression obtenue à la question précédente :

$$N = mg \cos \theta + ma \times \frac{2g}{a} (\cos \theta - \cos \theta_0) = mg \cos \theta + 2mg(\cos \theta(t) - \cos \theta_0) = mg(3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0)$$

On peut donc exprimer le vecteur : $\vec{N} = mg(2 \cos \theta_0 - 3 \cos \theta)\vec{u}_r$

26/ La bille risque de décoller lorsque $\|\vec{N}\| = 0$, ce qui donne :

$$3 \cos \theta = 2 \cos \theta_0 \quad \text{soit} \quad \theta = \arccos \frac{2}{3} \cos \theta_0$$

Soit, numériquement : $\theta_{\text{lim}} = 0,85 \text{ rad}$

27/ Si les angles restent petits, alors $\sin \theta \approx \theta$, l'équation devient donc :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{a}\theta = 0$$

En posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{a}}$, on peut alors mettre l'équation sous forme désirée :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

Un système décrit par une telle équation est appelé un **oscillateur harmonique**.

28/ Lorsque la bille est à l'équilibre, $\ddot{\theta} = 0$ donc :

$$\theta_{\text{éq}} = 0$$

La bille est à l'équilibre lorsqu'elle est au fond de la gouttière, logique...

29/ L'équation (E') est une équation harmonique homogène, elle admet donc pour solutions :

$$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

Or, on sait que $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$, et :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \\ \dot{\theta}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t) \end{array} \right. \quad \text{soit} \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta(0) = A = \theta_0 \\ \dot{\theta}(0) = B\omega_0 = 0 \end{array} \right.$$

On en déduit donc l'expression de θ en fonction du temps :

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$$

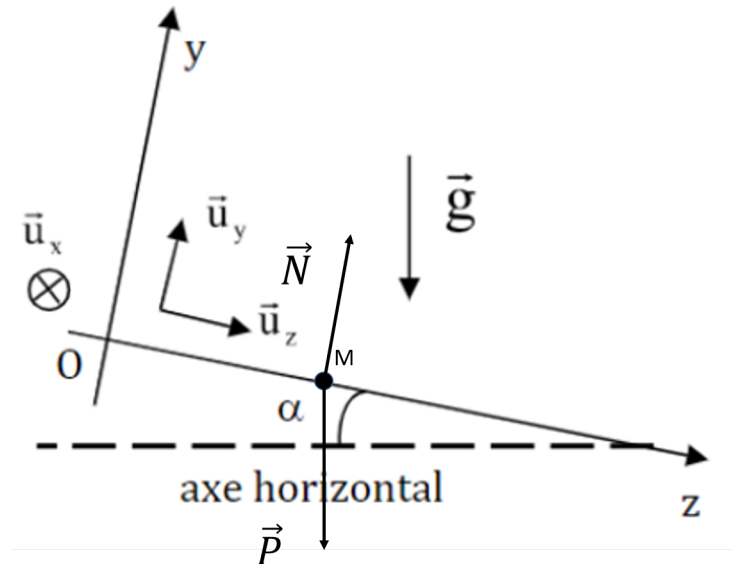
30/ Le mouvement est sinusoïdal donc périodique. La période de ce mouvement est donnée par : $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi a}{g}$

31/ L'évolution temporelle de l'angle θ est sinusoïdale donc l'angle ne dépassera jamais 10° et $\sin(0,17) = 0,17$ (on convertit la valeur en radians). L'approximation est donc bien vérifiée.

32/ L'angle ne peut donc pas atteindre la valeur de $0,85 \text{ rad}$ qui ferait décoller la bille. Pour que la condition soit vérifiée, il faudrait que la bille ait une vitesse initiale non nulle... ?

B) Gouttière inclinée

33/ Les forces peuvent être représentées sur le schéma suivant :



La projection du poids dans le repère cartésien donne :

$$\vec{P} = mg(\sin \alpha \vec{u}_z - \cos \alpha \vec{u}_y)$$

Or, d'après la projection que nous avons faite de \vec{u}_y plus tôt, on obtient :

$$\vec{P} = mg(\sin \alpha \vec{u}_z + \cos \alpha \cos \theta \vec{u}_x - \cos \alpha \sin \theta \vec{u}_y)$$

On peut noter également que \vec{N} n'a toujours pas de composante selon \vec{u}_z , il a toujours la même expression : $\vec{N} = N\vec{u}_r$.

34/ Le principe fondamental de la dynamique donne toujours la même relation :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N}$$

En projetant sur \vec{u}_z , on obtient alors :

$$m\ddot{z} = mg \sin \alpha$$

Ainsi, en intégrant par rapport au temps, on obtient, car l'angle α est constant :

$$\dot{z}(t) = mg \sin \alpha t + \dot{z}(0)$$

La vitesse initiale étant nulle et $z(0) = 0$, on a donc :

$$z(t) = mg \sin \alpha \frac{t^2}{2}$$

35/ La projection selon \vec{u}_θ donne :

$$a\ddot{\theta} = -g \cos \alpha \sin \theta$$

L'approximation des petits angles permet alors, en posant $\omega_1 = \sqrt{\frac{g \cos \alpha}{a}} = \sqrt{\cos \alpha} \omega_0$, d'établir l'équation différentielle harmonique suivante :

$$\ddot{\theta} + \omega_1^2 \theta = 0$$

Cette équation admet des solutions de la forme : $\theta(t) = A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t$, soit en utilisant les conditions initiales :

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \left(\sqrt{\frac{g \cos \alpha}{a}} t \right)$$

36/ On a la relation trigonométrique suivante :

$$x = a \sin \theta \quad \text{soit, aux petits angles } x \approx a\theta$$

Or, $\theta = \theta_0 \cos \omega_1 t$, donc :

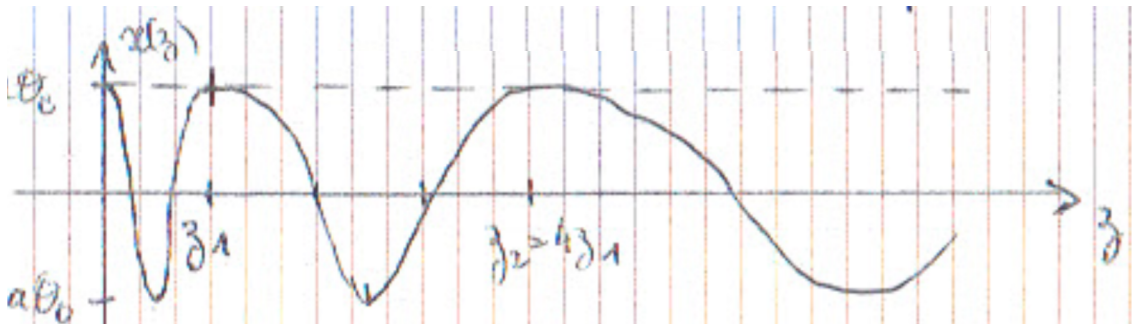
$$x(t) = \theta_0 \cos(\omega_1 t)$$

D'après la réponse à la question 34/, on a :

$$t = \sqrt{\frac{2z}{mg \sin \alpha}}$$

Soit, en réinjectant :

$$x(z) = \theta_0 \cos \left(\sqrt{\frac{g \cos \alpha}{a}} \sqrt{\frac{2z}{mg \sin \alpha}} \right) \quad \text{soit, } \boxed{x(z) = \theta_0 \cos \left(\sqrt{\frac{2z}{a \tan \alpha}} \right)}$$



Les maxima de x sont atteints lorsque $\cos \left(\sqrt{\frac{2z_n}{a \tan \alpha}} \right)$ c'est-à-dire lorsque :

$$z_n = \frac{4\pi^2 a \tan \alpha}{2} = z_1 n^2$$

Les maxima suivent une évolution quadratique.