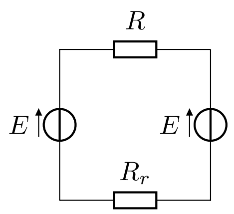
DS 3

# Vroum vroum tchou tchou

## I- Fonctionnement électrique d'un TGV

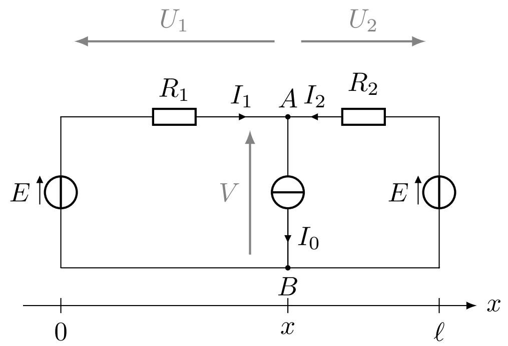
**1/** On utilise le schéma donné au début de l'énoncé auquel on enlève le générateur de courant.




**2/** Les deux résistances sont en série, la résistance équivalente à leur association est donc donnée par $R_{\text{eq}} = R + R_r = r_cL + r_rL = (r_c + r_r)L$. Or, on remarque que $\frac{r_c}{r_r} \approx 40$, on peut donc négliger $r_r$ par rapport à $r_c$ et ainsi $R_r$ par rapport à $R$.

**3/** La valeur de la caténaire est donnée par : $R = r_c\ell$. L'application numérique donne ainsi : $\boxed{R = 7,2\ \Omega}$.

**4/** Introduisons les notations suivantes :




La loi des nœuds en $A$ donne $I_1 + I_2 = I_0$.
La loi des mailles dans la maille de gauche donne : $E = U_1 + V \quad (1)$.
Dans la maille de droite, elle permet d'écrire : $E = U_2 + V \quad (1)$.
En appliquant les lois d'Ohm aux résistances étudiées en convention récepteur, on obtient : $U_1 = R_1I_1$ et $U_2 = R_2I_2$. Soit, en réinjectant dans les équations au-dessus :

$$\left\{\begin{array}{lcll} E & = & R_1I_1 + V = R_1(I_0 - I_2) + V & (1) \\ E & = & R_2I_2 + V & (2) \end{array}\right.$$

Les opérations $(1) - (2)$ et $R_2(1) + R_1(2)$ donnent :

$$\left\{\begin{array}{rcll} 0 & = & R_1(I_0 - I_2) - R_2I_2 & (3) \\ E(R_1 + R_2) & = & R_1R_2I_0 + R_2V + R_1V & (4) \end{array}\right.$$

On obtient donc, *in fine* :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{lcl} I_1 & = & \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}I_0 \\[2ex] I_2 & = & \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}I_0 \\[2ex] V & = & E - \dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}I_0 \end{array}\right.}$$

En utilisant les expressions données dans l'énoncé de $R_1$ et $R_2$, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} I_1 & = & \dfrac{R\left(1-\dfrac{x}{\ell}\right)}{R}I_0 \\ I_2 & = & \dfrac{R\dfrac{x}{\ell}}{R}I_0 \\ V & = & E-\dfrac{R^2\left(1-\dfrac{x}{\ell}\right)\dfrac{x}{\ell}}{R}I_0 \end{array}\right. \qquad \text{car } R_1+R_2=R\left(1-\frac{x}{\ell}\right)+R\frac{x}{\ell}=R$$

On obtient donc, en simplfiant :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{lcl} I_1 & = & \left(1-\dfrac{x}{\ell}\right)I_0=I_0\dfrac{\ell-x}{\ell} \\ I_2 & = & \dfrac{x}{\ell}I_0 \\ V & = & E-RI_0\left(1-\dfrac{x}{\ell}\right)\dfrac{x}{\ell} \end{array}\right.}$$

**5/** La locomotive reçoit de la puissance au niveau de son moteur, c'est-à-dire du générateur de courant. Il est en convention récepteur, la puissance qu'il échange avec le circuit est donc algébriquement reçue. Elle est donnée par la rélation :

$$\mathcal{P}_c=V\times I_0 \quad \text{soit} \quad \boxed{\mathcal{P}_c=EI_0-RI_0^2\left(1-\frac{x}{\ell}\right)\frac{x}{\ell}}$$

**6/** Les résistances $R_1$ et $R_2$ sont en convention récepteur également. Les puissances qu'elles reçoivent sont donc bien algébriquement reçues, l'expression de la puissance Joule reçue par la caténaire est donc la somme suivante :

$$\mathcal{P}_J=U_1I_1+U_2I_2=R_1I_1^2+R_2I_2^2 \quad \text{soit, avec ce qui précède} \quad \mathcal{P}_J=RI_0^2\left[\frac{x}{\ell}\left(\frac{\ell-x}{\ell}\right)^2+\left(\frac{\ell-x}{\ell}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right]$$

On obtient donc :

$$\boxed{\mathcal{P}_J=RI_0^2\frac{x}{\ell}\left(1-\frac{x}{\ell}\right)}$$

Cette puissance, nécessairement positive ($x<\ell$), donc réellement reçue par la résistance, est dissipée par effet Joule, c'est-à-dire transformée en transfert thermique.

**7/** La puissance totale fournie par les sous-stations est la somme des puissances fournies par chacune d'entre-elles. Elles sont en convention générateur, la puissance qu'elles échangent avec le circuit est donc bien algébriquement fournie :

$$\mathcal{P}_f=EI_1+EI_2 \quad \text{soit, d'après la loi des nœuds en A} \quad \boxed{\mathcal{P}_f=EI_0}$$

**8/** On peut exprimer :

$$\mathcal{P}_J+\mathcal{P}_c=RI_0^2\frac{x}{\ell}\left(1-\frac{x}{\ell}\right)+EI_0-RI_0^2\left(1-\frac{x}{\ell}\right)\frac{x}{\ell}=EI_0=\mathcal{P}_f$$

On obtient bien ce qui est attendu. Ceci traduit la conservation de l'énergie : ce qui est fourni par les deux générateurs est en partie reçu par la locomotive et le reste est perdu par effet Joule dans les caténaires (à cause de leurs résistances non nulles).

**9/** Le train roule à vitesse constante $v_0$. On peut donc écrire :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_0 \quad \text{soit, en intégrant avec } x(0)=0 \quad x(t)=v_0t$$

On obtient donc, en remplaçant $x$ par son expression dans $\mathcal{P}_J$ :

$$\boxed{\mathcal{P}_J(t)=RI_0^2\frac{v_0t}{\ell}\left(\frac{\ell-v_0t}{\ell}\right)}$$

**10/** La locomotive atteint la fin du tronçon considéré à l'instant $t_f$ tel que $\ell = x(t_f) = v_0 t_f$, soit $\boxed{t_f = \frac{\ell}{v_0}}$.

Numériquement, on obtient : $t_f = 376$ s

**11/** L'énergie totale $\mathcal{E}_{J,t_0\to t_f}$ dissipée par effet Joule pendant le passage du train sur ce tronçon est l'intégrale de $\mathcal{P}_J$ calculée entre $t_0$ et $t_f$ : $\mathcal{E}_{J,t_0\to t_f} = \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{P}_J(t)\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_f} RI_0^2 \frac{v_0 t(\ell - v_0 t)}{\ell^2}\mathrm{d}t$

soit $\mathcal{E}_{J,t_0\to t_f} = \frac{RI_0^2}{\ell^2}\int_{t_0}^{t_f} \ell v_0 t - v_0^2 t^2 \mathrm{d}t = \frac{RI_0^2}{\ell^2}\left[\ell v_0 \frac{t^2}{2} - v_0^2\frac{t^3}{3}\right]_{t_0}^{t_f}$

Ainsi $\mathcal{E}_{J,t_0\to t_f} = \frac{RI_0^2}{\ell^2} \times v_0 t_f^2 \left(\frac{\ell}{2} - \frac{v_0 t_f}{3}\right)$

Avec l'expression de $t_f = \frac{\ell}{v_0}$ $\left(\text{soit } \frac{t_f^2}{\ell^2} = \frac{1}{v_0^2}\right)$, on en déduit : $\mathcal{E}_{J,t_0\to t_f} = \frac{RI_0^2}{v_0}\left(\frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{3}\right)$

Ainsi $\boxed{\mathcal{E}_{J,t_0\to t_f} = \frac{RI_0^2\ell}{6v_0}}$

A.N. : $\mathcal{E}_{J,t_0\to t_f} = 2,8.10^8$ J

**12/** L'énergie totale fournie par les deux sous-stations s'écrit $\mathcal{E}_{f,t_0\to t_f} = \int_{t_0}^{t_f} E \times I_0 \mathrm{d}t = EI_0 t_f$ car $EI_0$ est une constante.

Ainsi $\boxed{\mathcal{E}_{f,t_0\to t_f} = EI_0 \times \frac{\ell}{v_0} = 9,4.10^9 \text{ J}}$ sur le même intervalle de temps. On donnera le résultat en fonction de $E$, $I_0$, $\ell$ et $v_0$.

**13/** On en déduit l'énergie $\mathcal{E}_{c,t_0\to t_f}$ consommée par les moteurs de la locomotive, par conservation de l'énergie :

$\mathcal{E}_{c,t_0\to t_f} =_{f,t_0\to t_f} -_{J,t_0\to t_f} = EI_0 \times \frac{\ell}{v_0} - \frac{RI_0^2\ell}{6v_0}$

Soit $\boxed{\mathcal{E}_{c,t_0\to t_f} = I_0\frac{\ell}{v_0}(E - RI_0) = 9,1.10^9 \text{ J}}$

**14/** Le rendement de ce mode d'alimentation de la locomotive s'écrit : $\eta = \frac{_{c,t_0\to t_f}}{_{f,t_0\to t_f}} = \frac{EI_0 \times \frac{\ell}{v_0} - \frac{RI_0^2\ell}{6v_0}}{EI_0 \times \frac{\ell}{v_0}}$, soit

$\boxed{\eta = 1 - \frac{RI_0}{6E} = 97\%}$

## II- Trajectoire d'un TGV

**15/** Par définition de l'accélération du point $M$, on a : $\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{a}_1$. Soit, en intégrant par rapport au temps, comme la vitesse initiale est nulle, on obtient :

$$\boxed{\vec{v}(t) = \vec{a}_1 t}$$

Par définition de la vitesse du point $M$, on a : $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \vec{v} = \vec{a}_1 t$. Soit, en intégrant par rapport au temps, comme le vecteur position initial est nul, on obtient :

$$\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = \vec{a}_1\frac{t^2}{2}}$$

**16/** Projetons les expressions précédentes sur $\vec{u}_x$, on obtient, en remarquant que $\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x$ :

$$\begin{matrix} a_1\frac{t^2}{2} = x(t) \\ a_1 t = \dot{x}(t) \end{matrix} \quad \text{soit, en élevant la deuxième expression au carré} \quad \frac{\dot{x}^2}{x} = 2a_1$$

Ce rapport est constant, on peut donc l'évaluer en $B$. On obtient donc l'expression suivante : $\boxed{a_1 = \frac{V_B^2}{2L}}$

**17/** Soit $\Delta t_B$ la durée mise par le train pour atteindre le point $B$. On remarque que $x(\Delta t_B) = a_1 \dfrac{\Delta t_B^2}{2} = L$ et $\dot{x}(\Delta t_B) = a_1 \Delta t_B = V_B$.
On choisit une des deux égalités :

$$\Delta t_B = \frac{V_B}{a_1} \quad \text{soit, en utilisant le résultat de la question précédente} \quad \boxed{\Delta t_B = \frac{2L}{V_B}}$$

**18/** Numériquement, on obtient : $\boxed{\Delta t_B = 192 \text{ s}}$

**19/** Le mouvement est circulaire, on a donc les expressions suivantes pour les vecteurs vitesse et accélération :

$$\boxed{\vec{v} = R\omega\vec{u}_r \quad \text{et} \quad \vec{a} = -R\omega^2\vec{u}_r + R\dot{\omega}\vec{u}_\theta}$$

**20/** La vitesse en $B$ est égale à $V_B$ en norme, on en déduit donc que $R\omega_B = V_B$ par continuité de la vitesse entre les deux phases du mouvement.
L'accélération tangentielle en $B$ est égale à $a_1$ en norme d'après l'énoncé. On en déduit donc que $R\dot{\omega}_B = a_1$.

**21/** $\dot{\omega} = \dot{\omega}_B$ est constant, on peut donc l'intégrer pour obtenir : $\omega(t) = \dot{\omega}_B t + \omega(0)$. Or, en l'instant $t = 0$, le point $M$ est en $B$ donc $\omega(0) = \omega_B$. Ainsi :

$$\omega(t) = \dot{\omega}_B t + \omega_B \quad \text{soit} \quad \boxed{\omega(t) = \frac{a_1}{R}t + \frac{V_B}{R}}$$

On peut donc intégrer à nouveau pour obtenir $\theta(t)$ en remarquant que $\theta(0) = 0$ :

$$\boxed{\theta(t) = \frac{a_1 \frac{t^2}{2} + V_B t}{R}}$$

**22/** Notons $\Delta t_C$ la durée du parcours de $B$ à $C$, telle que $\omega_C = \omega(\Delta t_C)$ :

$$\omega_C^2 - \omega_B^2 = \omega(\Delta t_C) - \omega_B^2 = \left(\frac{a_1}{R}\Delta t_C + \omega_B \Delta t_C\right)^2 - \omega_B^2 = \frac{a_1^2}{R^2}\Delta t_C^2 + 2\frac{a_1}{R}\Delta t_C \omega_B$$

Ainsi :

$$\frac{R}{2a_1}(\omega_C^2 - \omega_B^2) = \frac{a_1 t^2}{2R} + \omega_B t$$

On reconnaît l'expression de $\theta$ évaluée en $\Delta t_C$ soit, $\theta_C$.

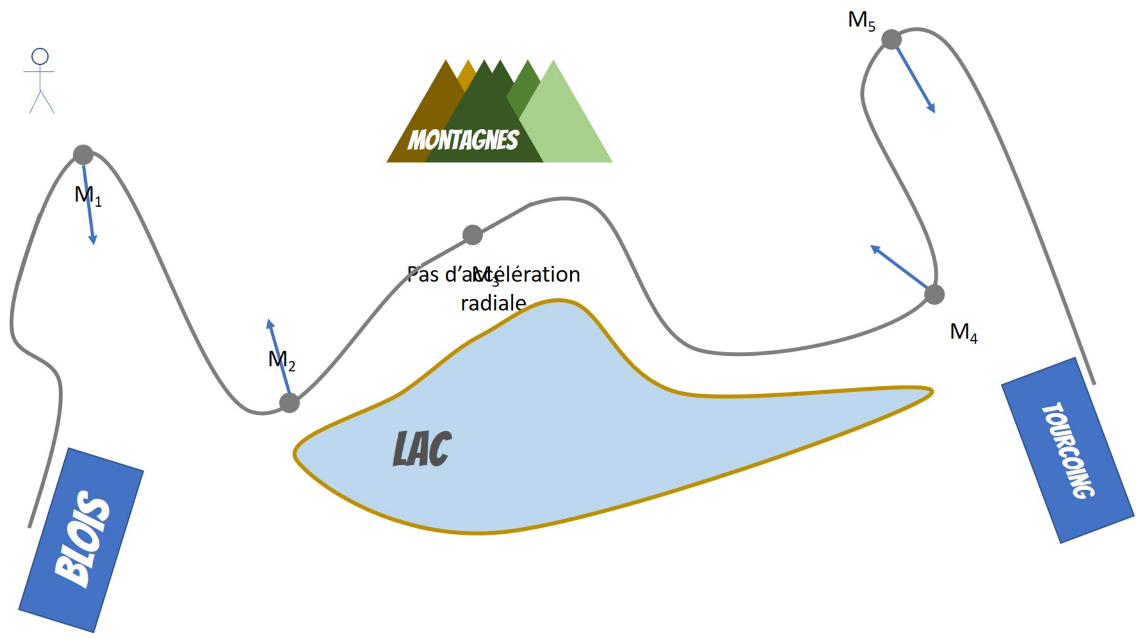
**23/** L'application numérique donne : $\omega_C = 0,019 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.
On a directement : $V_C = R\omega_C$, soit numériquement : $\boxed{V_C = 346 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}}$

**24/** Deux raisons existent :

- Si l'accélération radiale est trop importante, le train peut dérailler.
- C'est inconfortable pour les passagers : une force centrifuge apparaît dans un virage et plus on va vite, plus elle est forte, plus le virage est serré, plus elle est forte également.

**25/** L'accélération radiale est maximale en $C$ et vaut $R\omega_B^2$ en norme, soit, numériquement $1,39 \text{ m} \cdot \text{m}^{-2}$. L'accélération radiale dans le virage n'est jamais plus élevée que l'accélération maximale imposée par la législation.

**26/**




## III- Conduite automatique

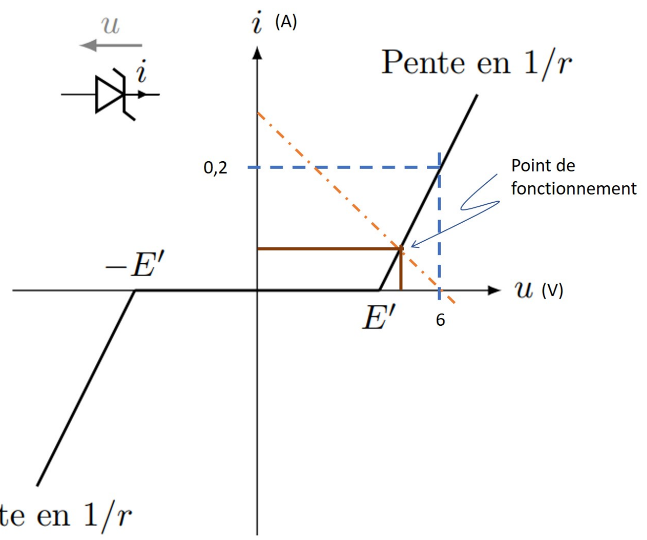
**27/** La caractéristique de la diode Zéner passe par le point de coordonnées (0,0) c'est donc un dipôle **passif** et ce n'est pas une droite, c'est donc un dipôle **non-linéaire**.

**28/** Sur cette plage, $i = 0$, la diode se comporte donc comme un interrupteur ouvert.

**29/** Pour $u \geq E'$, la caractéristique de la diode est une droite de pente 1/r et passant par le point de coordonnées ($E'$,0). On en déduit donc que la loi d'évolution de l'intensité est de la forme : $i = a.u + b$ avec $a = \frac{1}{r}$.
Utilisons le point d'intersection : $0 = a.E' + b \Leftrightarrow b = -\dfrac{E'}{r}$. On en déduit donc que :

$$\boxed{i = \frac{u - E'}{R}}$$

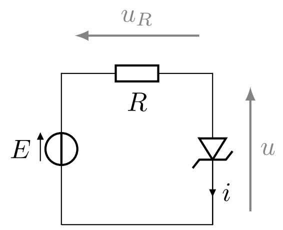
**30/** Pour le point d'abscisse $u = 6$ V, l'ordonnée vaut : $i = \dfrac{6-4}{10} = 0,2$ A. On place alors le point :




**31/** Par un raisonnement analogue à la question 30/, on obtient :

$$\boxed{i = \frac{u + E'}{r}}$$

**32/** Le circuit est présent ci-dessous :




**33/** La loi des mailles donne $E = u_R + u$, ce qui devient, grâce à la loi d'Ohm appliquée à $R$ :

$$E - Ri = u$$

**34/** On trace alors sur la fiche annexe la courbe d'équation $i = \dfrac{E-u}{R}$. L'intersection entre cette courbe et la caractéristique de la diode Zéner donne alors le point de fonctionnement du circuit.
Graphiquement, on lit : (4,7 V ;0,07 A).

**35/** Analytiquement, il suffit d'identifier les deux expressions des intensités obtenues dans cette partie :

$$\frac{E-u}{R} = \frac{u-E'}{r} \quad \text{soit} \boxed{u = \frac{rE + RE'}{r+R}}$$

Ce qui donne pour $i$ : $\boxed{i = \dfrac{E-E'}{R+r}}$
Numériquement, on obtient : $u = 4,7$ V et $i = 67$ mA. Ce résultat est tout à fait cohérent avec le résultat graphique.

**36/** Pour avoir $i = 0$, il faut que l'intersection se trouve au niveau de l'axe des abscisses. Il faut donc que la caractéristique de la pile coupe l'axe des abscisses en une valeur comprise entre $-E'$ et $E'$.
La condition est donc $\boxed{-E' \leq E \leq E'}$.

**37/** Pour que $i \leq 0$, il faut que l'intersection se trouve sur la branche de gauche de la caractéristique. Il faut donc pour une raison analogue à celle donnée précédemment, que $\boxed{E \leq -E'}$.

**38/** Le maximum d'un des deux signaux n'est pas atteint au moment où l'autre signal s'annule, les deux signaux ne sont donc pas déphasés de $\frac{\pi}{2}$.

**39/** L'amplitude d'un signal est la moitié de la différence entre les valeurs maximale et minimale atteintes par le signal. Ici, cette différence vaut 4 divisions. Sachant qu'une division correspond à 1,5 V, l'amplitude vaut $\boxed{3 \text{ V}}$.
Le signal se répète à l'identique toutes les deux divisions horizontales. Or, une division horizontale dure 1 ms. On en déduit donc que la période du signal est de 2 ms. Or, la fréquence d'un signal est l'inverse de sa période, la fréquence de ce signal vaut donc $\boxed{0,5 \text{ kHz}}$.
La valeur moyenne d'un signal$s$ est donnée par :

$$< s >= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\mathrm{d}t \quad \text{avec } T \text{ la période du signal.}$$

On peut donc évaluer cette intégrale en calculant l'aire algébrique sous la représentation temporelle du signal sur une période.

Ici, sur les 7/10 de la période, le signal a une valeur de 4,5 V tandis qu'il prend une valeur de -1,5 V sur les 3/10 restants. Les aires algébriques sont donc celles des rectangles de hauteur la valeur du signal et de largeur la durée sur laquelle le signal prend cette valeur :

$$\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\mathrm{d}t = 0,7.T \times 4,5 - 0,3.T \times 1,5 \quad \text{ainsi} \quad \boxed{< s >= \frac{1}{T}(0,7.T \times 4,5 - 0,3.T \times 1,5) = 2,7 \text{ V}}$$

**40/** Le convertisseur dysfonctionne. Il ne renvoie pas un signal de valeur moyenne satisfaisante. Concernant la fréquence est l'amplitude c'est toutefois satisfaisant.