DM 3

Étude d'un prisme

Ce devoir maison est un problème très classique pour un étudiant de MPSI. Tous les étudiants de MPSI, de PCSI et de PTSI de France ont un jour traité ce problème. Il est donc normal que vous vous y confrontiez un jour.
Nous avons notamment utilisé les résultats de ce problème lors du TP n°4.

1. **Qu'appelle-t-on approximation de l'optique géométrique ? Quelle est sa validité ? Citer un exemple où l'approximation n'est plus valable.**

L'approximation géométrique est valable tant que la taille a des obstacles rencontrés par la lumière est supérieure à sa longueur d'onde, sinon il apparaît le phénomène de diffraction. Le phénomènes de diffraction est donc un cas où l'approximation n'est plus valable.

2. **L'énoncé dit « Le rayon incident se situe dans le plan de la coupe, ce sera donc le cas pour tous les rayons réfractés ». Justifier.**

Les rayons réfractés seront dans le plan de la coupe car ils sont dans le même plan que le rayon incident, d'après la 1ère loi de Descartes.

3. **Représenter sur un schéma la marche qualitative *(les valeurs exactes des angles ne sont donc pas attendues)* du rayon lumineux. On fera apparaître clairement les angles i, r, i', r' et D.**

On a $r < i$ et $r' > i'$ car $n > n_{air}$

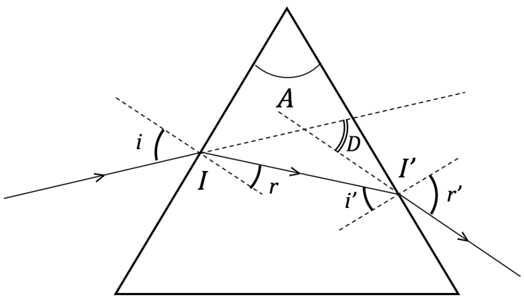

Schéma du prisme

Formules du prisme

4. **Donner la relation liant i, r et n. On pourra se référer dans la suite à cette relation en parlant de la relation (1).**

D'après la 3ème loi de Descartes appliquée au point I, on a $\boxed{\sin(i) = n\sin(r)}$ (1)

5. **Donner la relation, appelée (2), liant i', r' et n.**

D'après la 3ème loi de Descartes appliquée au point I', on a $\boxed{n\sin(i') = \sin(r')}$ (2)

6. **Par un raisonnement géométrique, trouver la relation (3) entre A, r et i'.**

Dans le triangle AII' (où A est le sommet du prisme), on a $\widehat{AII'} + \widehat{IAI'} + \widehat{II'A} = 180°$.

Or $\widehat{IAI'} = A$, $\widehat{AII'} + r = 90°$ et $\widehat{AI'I} + i' = 90°$.
Donc $A + 90 - r + 90 - i' = 180$, d'où

$$\boxed{A = r + i'} \qquad (3)$$

7. **Montrer que $D = i - i' + r' - r$.**

Appelons E le point où se croisent les prolongements des rayons incidents et émergents. Dans le triangle EII', on a $\widehat{EII'} + \widehat{IEI'} + \widehat{II'E} = 180°$.

Or $\widehat{IEI'} = 180 - D$, $\widehat{EII'} = i - r$ et $\widehat{EI'I} = r' - i'$.
Donc $180 - D + i - r + r' - i' = 180$ et

$$\boxed{D = i - r + r' - i'}$$

8. **Trouver la relation (4) entre A, D, i et r'.**

On sait que $A = r + i'$ et $D = i - r + r' - i'$. Donc

$$\boxed{D = i + r' - A}$$

Emergence du faisceau

9. **Peut-il y avoir réflexion totale sur la face d'entrée du prisme ? Justifier. Si oui, exprimer l'angle d'incidence limite i_{lim}.**

Non, il ne peut y avoir réflexion totale à l'entrée du prisme car $n > n_{air}$. Or il faut que le premier milieu soit plus réfringent que le deuxième pour que la réflexion totale soit possible.

10. **Peut-il y avoir réflexion totale sur la face de sortie du prisme ? Justifier. Si oui, exprimer l'angle d'incidence limite i'_{lim}.**

Oui, il peut y avoir réflexion totale à l'entrée du prisme car $n > n_{air}$.

Il y a réflexion totale si $n\sin(i') > 1$. L'angle d'incidence limite est donc tel que $i' = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$.

11. **Donner la condition sur i' pour qu'il y ait un faisceau réfracté. En déduire la condition sur r, puis sur i.**

Pour qu'il y ait réflexion totale, il faut $i' > i'_{lim}$. Donc pour qu'il y a un rayon émergent, il faut $i' \leq i'_{lim}$.

On sait par ailleurs que $A = r + i'$. Ainsi, $i' \leq i'_{lim} \iff r \geq A - i'_{lim}$
En outre, on sait que $\sin(i) = n\sin(r)$, et la fonction *sinus* est croissante sur l'intervalle [0,90°]. Comme $r \in [0, 90°]$, $r \geq A - i'_{lim} \iff \sin(r) \geq \sin(A - i'_{lim})$

$$\boxed{i \geq \arcsin(n\sin(A - \arcsin(1/n)))}$$

Déviation par un prisme

12. **Expérimentalement, on constate que lorsque l'on fait varier l'angle d'incidence, la déviation varie également et elle atteint un minimum pour une certaine valeur de i. Dans cette configuration, on peut montrer que $i = r'$ et $i' = r$. Quelle symétrie possède alors le trajet du rayon lumineux ?**

Si $i = r'$ et $r = i'$, le trajet du faisceau lumineux admet la hauteur passant par A comme axe de symétrie.

13. **On appelle D_m l'angle de déviation minimal. Exprimer i en fonction de A et de D_m.**

Au minimum de déviation, $D = D_m$, et $i = r'$. Ainsi, $D_m = 2i - A$.

14. **Donner une relation entre D_m, A et n.**

On a vu que $i = r' = \dfrac{D_m + A}{2}$ et $i' = r = \dfrac{A}{2}$. Donc (1) devient

$$\boxed{\sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right) = n\sin\left(\frac{A}{2}\right)}$$

15. **Pour un prisme d'angle $A = 60°$, on mesure un angle $D_m = 58°$, que l'on arrondira à $D_m = 60°$. Déterminer la valeur de n.**

On a $n = \dfrac{\sin\left(\dfrac{D_m + A}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{A}{2}\right)} = \dfrac{\sin\left(\dfrac{60 + 60}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{60}{2}\right)} = \dfrac{\sin(60)}{\sin(30)} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3} = \underline{1,7}$.

Cette valeur est cohérente avec les ordres de grandeurs de l'indice optique du verre.