DM 8

Bobines d'allumage d'une bougie d'un moteur thermique

Un exercice plutôt classique d'ordre 1. Il est vraiment nécessaire de maîtriser le raisonnement de la phase 2 avec le changement d'origine.

Étude préliminaire

1/ Pourquoi lors de l'ouverture de l'interrupteur peut-il se former une étincelle ?

Juste avant l'ouverture de l'interrupteur, un courant circule dans le circuit de gauche. Or, le basculement de l'interrupteur ne permet pas le passage des charges au travers de l'air et empêche dont la circulation de ce courant. On peut considérer que l'accumulation des charges au niveau de l'interrupteur augmente jusqu'à un certain point de rupture où les charges passent brusquement dans l'air créant un arc électrique.

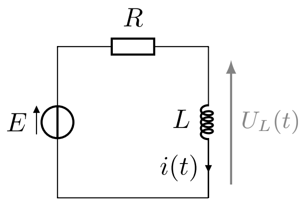
2/ Est-ce un phénomène qui peut poser problème ? Justifier.

Ce phénomène peut poser problème si jamais il n'est pas maîtrisé, notamment causer des explosions. Ici, c'est justement cela qu'on recherche, il n'y a donc pas de souci majeur.

Étude de la phase 1

3/ Établir l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ pour $t \geqslant 0$.

Nous sommes sur la phase 1, l'interrupteur est donc en position 1. Le circuit est donc équivalent à celui qui suit :



En notant u_R la tension aux bornes de la résistance R, on peut écrire à l'aide de la loi des mailles :

$$E = U_R(t) + U_L(t)$$

Soit, en utilisant la loi d'Ohm appliquée à la résistance R et la loi de la bobine :

$$U_R(t) = Ri(t) \qquad \text{et} \qquad U_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

On obtient :

$$E = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt}$$

Ce qui donne sous une forme canonique :

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = \frac{E}{L}$$

Soit, en posant $\tau = \dfrac{L}{R}$:

$$\text{Pour } t \geqslant 0, \quad \boxed{\frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{\tau} = \frac{E}{R\tau}} \tag{E}$$

4/ Déterminer les conditions initiales.

La bobine est déchargée pour $t < 0$, on en déduit donc que $i(0^-) = 0$. Par continuité de l'intensité traversant la bobine, on peut alors affirmer que $i(0^+) = i(0^-) = 0$. Ainsi, la condition initiale est la suivante :

$$\boxed{i(0) = 0}$$

5/ Résoudre l'équation différentielle de $i(t)$. Au bout de quelle durée T_1 a-t-on atteint le régime permanent ?

On résout (E) pour $t \geqslant 0$.

Les solutions de l'équation homogène associée à (E) sont de la forme :

$$i_H(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \text{avec } A \in \mathbb{R}$$

Une solution particulière de (E) est :

$$i_P(t) = \frac{E}{R}$$

On en déduit ainsi la forme des solutions de (E) :

$$i(t) = i_H(t) + i_P(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R} \qquad \text{avec } A \in \mathbb{R}$$

Connaissant la condition initiale sur i, on en déduit que l'expression de $i(t)$ correspond aux solutions du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{di(t)}{dt} + \dfrac{i(t)}{\tau} = \dfrac{E}{R\tau} \\ i(0) = 0 \end{cases}$$

On en déduit alors $i(0) = A + \dfrac{E}{R} = 0$.
Ainsi, on peut affirmer que $A = -\dfrac{E}{R}$.

L'expression de i pour $t \geqslant$ est donc :

$$i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

D'où :

$$\boxed{i(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ \dfrac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) & \text{pour } t \geqslant 0 \end{cases}}$$

Le régime permanent est atteint au bout de $\underline{T_1} = 5\tau = 5\underline{\dfrac{L}{R}}$.
L'application numérique donne : $\boxed{T_1 = 0,50 \text{ ms}}$.

6/ En déduire l'expression de $U_L(t)$. Cette fonction est-elle continue ?

D'après la loi de la bobine, $U_L(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$. Ainsi, on a :

$$U_L(t) = L\frac{E}{R\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} = Ee^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{pour } t \geqslant 0$$

Donc :

$$\boxed{U_L(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ Ee^{-\frac{t}{\tau}} & \text{pour } t \geqslant 0 \end{cases}}$$

U_L est continue sur $\mathbb{R}_-$ et sur $\mathbb{R}_+^*$, il faut donc vérifier la continuité en 0. Il faut donc calculer les limites à gauche et à droite en 0 :

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t<0}} U_L(t) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} U_L(t) = E$$

Ces deux limites étant différentes, la fonction U_L n'est donc pas continue sur $\mathbb{R}$.

La rédaction dans cette correction se veut rigoureuse. Je tolèrerai une rédaction moins rigoureuse notamment à cause du manque de rigueur dans l'énoncé.

Étude de la phase 2

7/ On réinitialise le chronomètre. Donner les conditions initiales.

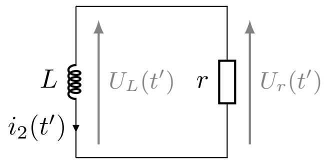
On réinitialise le chronomètre, ainsi cela revient à poser un changement de variable $t' = t - T_1$ de sorte que pour $t = T_1$ alors $t' = 0$. Posons i_2 l'intensité circulant dans la bobine durant la phase 2.
On considère alors $i_2(t')$ et on cherche la condition initiale. *Le changement de fonction permet de clarifier le propos et éviter de se tromper dans les calculs ultérieurs.*

Ainsi, $i_2(t') = i(t) = i(t'+T_1)$ donc $i_2(0) = i(T_1)$. Or, on sait que $T_1 = 5\tau$ et que pour une réponse indicielle, la valeur atteinte au bout de 5τ vaut 99% de la valeur consigne.

On en déduit donc $\boxed{i_2(0) = 0,99\dfrac{E}{R} = I_2}$.

8/ Établir l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$. La résoudre. Quelle est la nouvelle constante de temps τ_0 ?

Nous sommes désormais dans la phase 2, l'interrupteur étant désormais en position 2, le circuit équivalent est le suivant :



Posons $U_r(t')$ la tension aux bornes de la résistance r. La loi des mailles donne alors :

$$U_L(t') = U_r(t')$$

La loi d'Ohm appliquée à r et la loi de la bobine donnent :

$$U_r(t') = -ri_2(t') \qquad \text{et} \qquad U_L(t') = L\frac{di_2(t')}{dt'}$$

D'où :

$$L\frac{di_2(t')}{dt'} + ri_2(t') = 0$$

Ainsi, en posant $\tau' = \dfrac{L}{r}$:

$$\boxed{\frac{di_2(t')}{dt'} + \frac{i_2(t')}{\tau'} = 0} \tag{E'}$$

9/ Faire un bilan énergétique de la décharge.

La loi des mailles appliquée au circuit donne :

$$U_L(t') = U_r(t')$$

Multiplions cette égalité par :

$$U_L(t')i_2(t') = U_r(t')i_2(t')$$

D'après les lois de la bobine et d'Ohm (en convention générateur), on obtient :

$$L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}(t')i_2(t') = -ri_2^2(t')$$

On reconnait ainsi la dérivée de l'énergie emmagasinée par la bobine $\mathscr{E}_L$ et la puissance dissipée par effet Joule par la résistance $\mathscr{P}_r$:

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_L}{\mathrm{d}t} = -\mathscr{P}_r$$

Toute la puissance fournie par la bobine est reçue par la résistance.

10/ Indiquer l'ordre de grandeur de la durée T_2 de la décharge. Comparer au temps de charge T_1.

Le temps de décharge est donné par $T_2 = 5\tau' = 5\dfrac{L}{r}$.

L'application numérique donne : $\boxed{T_2 = 0,5 \text{ s}}$

On remarque que $\boxed{T_2 = 1000.T_1}$. La phase de décharge est donc très longue devant la phase de charge.

11/ En réalité, la charge reprend au bout d'un temps T tel que $T < T_2$. Dessiner qualitativement l'allure de $i(t)$ sur plusieurs cycles de charge-décharge et montrer en quoi ce dispositif « *lisse* » le courant.

Pour répondre à cette question, il faut trouver l'expression de $i_2(t)$. L'équation (E') étant une équation homogène, on peut alors donner la forme générale des solutions de cette équation pour $t' \geqslant 0$:

$$i_2(t') = Ae^{-\frac{t}{\tau'}}$$

Avec la condition initiale trouvée en question 7/, on a : $i_2(0) = I_0$ donc :

$$i_2(0) = A = I_0$$

Ainsi, $\boxed{i_2(t') = I_0 e^{-\frac{t}{\tau'}}}$

On peut alors tracer l'allure de l'intensité traversant la bobine :

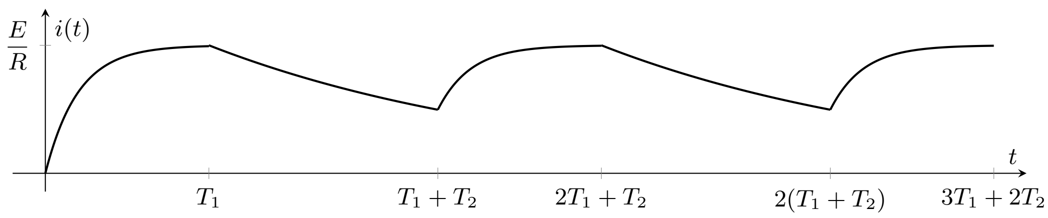


Figure 1 : Évolution de l'intensité traversant la bobine.

Comme nous l'avons dit à la question 1, ce qui nous intéresse est la discontinuité de U_L pour créer des étincelles. La discontinuité du courant est risquée pour le moteur et nous cherchions à nous en débarrasser, ainsi, la réponse à la question 7 nous assure que cette tension est discontinue mais on observe ci-dessus que l'intensité reste continue, celle-ci est donc « lissée » car elle n'est pas hachée. Tout va donc très bien.