Devoir Maison

1) → Volume diminue → Pression augmente

Dès que la pression P_{int} devient supérieure à P_a)

la bille remonte et ainsi de suite

⇒ Oscillations.

2) Bille soumise à :

→ Force pressante extérieure : $\vec{F_{ext}} = P_a S \vec{k}$

→ Force pressante intérieure : $\vec{F_{int}} = -P_e S \vec{k}$.

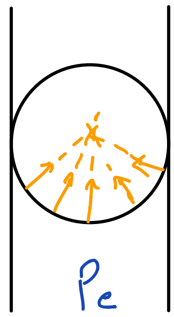
→ Poids de la bille : $\vec{P} = mg\vec{k}$.

Equilibre :

$$\vec{F_{ext}} + \vec{F_{int}} + \vec{P} = \vec{0}$$

Projetons sur $\vec{k}$: $P_e = P_a + \frac{mg}{S}$

NB : Calcul $\vec{F}$ réel :



En coordonnées sphériques :

$$\vec{F_{int}} = \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} P_e \times dS\,\vec{e_r} = \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} P_e \times (r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi)\vec{e_r}$$

$\vec{F_{int}}$ = calcul de deuxième année $= P_e \times S\,\vec{e_z}$.

3) Principe fondamental de la dyn appliqué à la bille :

$$m\vec{a} = \vec{F_{ext}} + \vec{F_{int}} + \vec{P}$$

Mouvement unidirectionnel selon $\vec{k}$: $\vec{a} = \ddot{z}\,\vec{k}$.

Donc, en projetant sur $\vec{k}$:

$$m\ddot{z} = P_a S - P(z) S + mg$$

D'où, $\ddot{z} = \left[P_a - P(z)\right]\frac{S}{m} + g \Rightarrow \boxed{\ddot{z} = \left[P_e - P(z)\right]\frac{S}{m}}$ d'après 2)

4) Ballon calorifugé : évolution adiabatique
De plus, évolution quasi-statique réversible $\Big\} \rightarrow$ isentropique

Le gaz est un GP, on peut donc appliquer la loi de Laplace :

$$p(z)V(z)^{\gamma} = P_e V_0^{\gamma}$$ avec $V(z)$ le volume du système lorsque la bille est en z.

$V(z) = V_0 - Sz$ ($V < V_0$ si bille en dessous de la position d'éq
$V > V_0$ si bille au-dessus de la position d'éq)

Ainsi : $$\boxed{p(z) = P_e\left(\frac{V_0}{V_0 - Sz}\right)^{\gamma} = P_e\left(\frac{1}{1-\frac{Sz}{V_0}}\right)^{\gamma}}$$

5) L'équation du mouvement devient :

$$\ddot{z} = \left[P_e - P_e\left(\frac{1}{1-\frac{Sz}{V_0}}\right)^{\gamma}\right]\frac{S}{m} = \boxed{\frac{P_e S}{m}\left[1-\left(\frac{1}{1-\frac{Sz}{V_0}}\right)^{\gamma}\right]}$$

6) $Sz \ll V_0$ donc $\frac{V_0}{Sz} \ll 1 \Rightarrow \ddot{z} = \frac{P_e S}{m}\left[1-\left(1+\gamma\frac{Sz}{V_0}\right)\right]$

D'où, $$\ddot{z} + \frac{P_e S}{m} \times \left(\frac{\gamma S z}{V_0}\right) = 0$$

Posons $\omega_0 = S\sqrt{\dfrac{P_e \gamma}{m V_0}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0}$

ED harmonique : Solutions sinusoïdales.

$$\boxed{z(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi).}$$ Mvt sinusoïdal.

7) En mesurant la période du mouvement, on obtient γ :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{S}\sqrt{\frac{m V_0}{P_e \gamma}}$$

Donc, $$\boxed{\gamma = 4\pi^2 \frac{m V_0}{P_e S^2 T^2}}$$

- $[\gamma] = 1$ car $\gamma = \dfrac{C_p}{C_v}$.
- $[m V_0] = M.L^3$
- $[P_e] = M.L^{-1}.T^{-2}$

$\hookrightarrow [P_e S^2 T^2] = M L^3 = [m V_0]$

On a bien $[\gamma] = 1$ ✓.