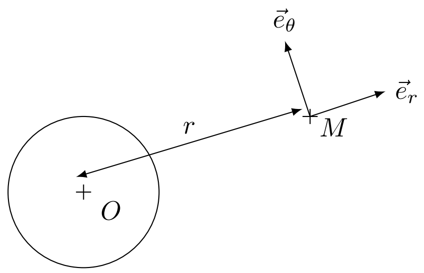
DM 21

Chapitre 21

Modèle classique de trou noir

Un exercice typique de ce qui peut tomber aux concours. Des questions de cours pour commencer puis une utilisation des résultats pour établir quelques résultats et en dire quelques petites choses. Ici, on ne creuse pas beaucoup.

1/ Système : astre M de masse m
Référentiel : astrocentrique supposé galiléen
Repère : Polaire d'origine O et lié à M
Bilan des actions mécaniques : Attraction gravitationnelle subie par M de la part de O :



L'expression de la force d'attraction gravitationnelle est la suivante :

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{O/M} = -\frac{Gmm_0}{r^2}\vec{e}_r}$$

Cette force dérive de l'énergie potentielle suivante :

$$E_p = -\frac{Gmm_0}{r} + \text{cste}$$

Or, on considère que cette énergie potentielle est nulle à l'infini. On en déduit donc que cste$= 0$, d'où :

$$\boxed{E_p = -\frac{Gmm_0}{r}}$$

L'énergie mécanique de l'astre M s'exprime :

$$\boxed{E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{Gmm_0}{r}}$$

où v est la norme de la vitesse du point M.

La force est conservative dans la mesure où elle dérive d'une énergie potentielle. On peut donc en déduire que l'énergie mécanique est conservée au cours du mouvement.

2/ Le moment par rapport à O de la force d'attraction gravitationnelle est donné par :

$$\overrightarrow{\mathscr{M}}_O(\overrightarrow{F}_{O/M}) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F}_{O/M} = r\vec{e}_r \wedge -\frac{Gmm_0}{r^2}\vec{e}_r = \vec{0} \quad \text{par propriété du produit vectoriel}$$

Appliquons le théorème du moment cinétique au point M par rapport à O :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathscr{L}}_O(M)}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathscr{M}}_O(\overrightarrow{F}_{O/M}) = \vec{0}$$

On en déduit donc que : $\overrightarrow{\mathscr{L}}_O(M) = \overrightarrow{\text{cste}}$. On peut en conclure deux choses :

- La direction du moment cinétique est constante, or, $\overrightarrow{\mathscr{L}}_O(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est donc constamment orthogonal à la même direction par propriété du produit vectoriel. Il est donc contenu dans un plan orthogonal à cette direction et passant par O.

- $||\overrightarrow{\mathscr{L}}_O(M)|| = \text{cste} = ||\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}||$. Or, $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$, on en déduit donc que :

$$||r\vec{e}_r \wedge m(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta)|| = mr^2\dot{\theta} = \text{cste}$$

On peut donc poser $C = r^2\dot{\theta}$ qu'on vient de prouver comme étant une constante du mouvement.

3/ L'énergie mécanique s'exprime ainsi :

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mm_0}{r} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{Gmm_0}{r}$$

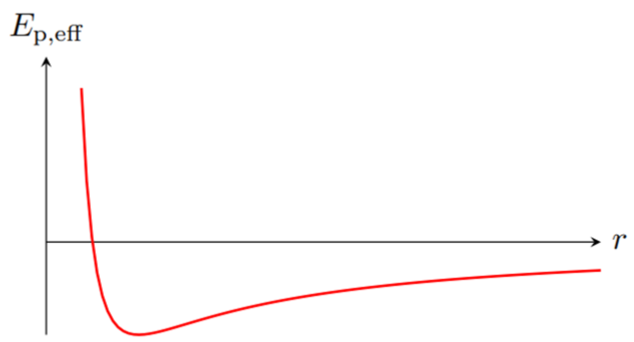
En utilisant le fait que $\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$, on obtient :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{Gmm_0}{r}$$

On identifie bien une énergie potentielle ne dépendant que de r, de la forme :

$$\boxed{E_{\text{p,eff}} = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{Gm_0m}{r}}$$

4/ Pour des petites distances r, le terme dominant est celui en $1/r^2$. Pour de grandes distances, le terme dominant est celui d'énergie potentielle, on en déduit donc le tracé suivant :



Le point M peut échapper à l'attraction de l'astre si sa trajectoire est non-bornée pour $r \to \infty$, c'est-à-dire pour $\boxed{E_m \geq 0}$.

5/ La vitesse de libération correspond à la vitesse minimale à conférer à l'astre M pour le mettre dans un état de diffusion à la surface de l'astre attracteur. On peut le retrouver plus qualitativement en exprimant la conservation de l'énergie mécanique entre la surface de l'astre et une distance infinie en indiquant qu'à la limite la particule s'est infiniment éloignée de l'astre ($r \to \infty$) mais n'a plus qu'une vitesse nulle ($v = 0$). Ainsi :

$$\frac{1}{2}mv_{\text{lib}}^2 - G\frac{m_0m}{R} = 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{v_{\text{lib}} = \sqrt{\frac{2Gm_0}{R}}}$$

6/ Par définition du rayon de Schwarzschild, si l'astre a pour rayon R_S, alors sa vitesse de libération est égale à c. On en conclut que l'astre est un trou noir si :

$$\boxed{R < R_S = \frac{2Gm_0}{c^2}}$$

7/ Numériquement, on obtient :

$$\boxed{R_{S,S} = 3,0 \text{ km}} \quad \text{et} \quad \boxed{R_{S,T} = 9,0 \text{ mm}}$$

Pour obtenir la densité des astres attracteurs, il nous faut revenir à la définition de la densité. Sachant que le volume d'une boule est donné par $\frac{4}{3}\pi R^3$, on obtient :

$$d = \frac{m_0}{\frac{4}{3}\pi R^3}\rho_{\text{eau}}$$

L'application numérique donne :

$$\boxed{d_S = 1,84.10^{16}} \quad \text{et} \quad \boxed{d_T = 2,04.10^{27}}$$

C'est phénoménal : imaginez toute la masse de la Terre concentrée dans une balle de tennis de table !!

8/ Une première contradiction consiste à généraliser des résultats de mécanique classique à des vitesses égales à la vitesse de la lumière, qui se rapportent donc au **domaine de la relativité**. La seconde contradiction est la généralisation de résultats de gravitation, qui s'appliquent donc aux particules massives, à la lumière, alors qu'on sait que **les photons sont sans masse**.