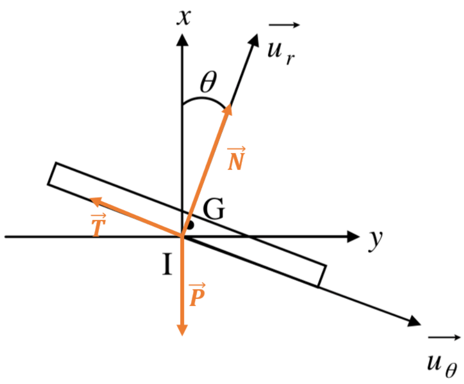
DM 20

Chapitre 20

Loi de Murphy

Cet exercice ressemble à celui concernant la chute de l'arbre. Il rassemble des notions de cours sur le moment cinétique et le moment d'inertie mais il est aussi suffisamment calculatoire pour être un peu exigeant.

1/ Nous nous intéressons à la tartine que nous étudions dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Cette étude nécessite un repère et nous utiliserons pour cela celui proposé dans l'énoncé $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$.



La tartine est soumise à :

- son poids $\vec{P} = -mg\vec{u}_x$ appliqué en G
- l'action de la table sur elle $\vec{R} = T\vec{u}_\theta + N\vec{u}_r$ appliqué en I

La tartine est en rotation autour de l'axe (Iz), on exprime donc les moments des différentes forces par rapport à cet axe :

- Poids : $\mathscr{M}_{Iz}(\vec{P}) = (\vec{IG} \wedge \vec{P}).\vec{u}_z = (e\vec{u}_r \wedge -mg\vec{u}_x).\vec{u}_z = (emg\sin\theta\vec{u}_z).\vec{u}_z = emg\sin\theta$
- Action de la table : $\mathscr{M}_{Iz}(\vec{R}) = 0$ l'action de la table étant appliquée en I

En effet, $\vec{IG} = e\vec{u}_r$

Ainsi, le théorème du moment cinétique appliquée à la tartine par rapport à (Iz) donne :

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{L}_{Iz}}{\mathrm{d}t} = \mathscr{M}_{Iz}(\vec{P}) + \mathscr{M}_{Iz}(\vec{R})$$

Or, par définition du moment d'inertie, $\mathscr{L}_{Iz} = J_{Iz}\dot{\theta}$, on obtient ainsi :

$$\boxed{J_{Iz}\ddot{\theta}(t) = emg\sin\theta(t)}$$

Multiplions cette expression par $\dot{\theta}$ et intégrons entre 0 et t, on obtient :

$$\boxed{J_{Iz}\frac{\dot{\theta}^2(t)}{2} + emg(\cos\theta(t) - 1) = 0}$$

car $\dot{\theta}(0) = 0$ et $\theta(0) = 0$

2/ Le centre de gravité G a un mouvement circulaire autour du point I. Dans le repère considéré, sa vitesse a donc pour expression :

$$\vec{v} = e\dot{\theta}\vec{u}_r \quad \text{soit l'accélération} \quad \vec{a} = e\ddot{\theta}\vec{u}_r + e\dot{\theta}^2\vec{u}_\theta$$

Le théorème de la résultante dynamique appliqué à la tartine donne donc :

$$\begin{cases} me\ddot{\theta} = -mg\cos\theta + N & \text{selon } \vec{u}_r \\ me\dot{\theta}^2 = mg\sin\theta + T & \text{selon } \vec{u}_\theta \end{cases}$$

En injectant l'expression trouvée à la question précédente dans ces équations, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} me\dfrac{emg\sin\theta}{J_{Iz}} + mg\cos\theta = N \\ \\ me\dfrac{2emg(1-\cos\theta)}{J_{Iz}} = mg\sin\theta + T \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} N = mg\cos\theta + \dfrac{e^2m^2g\sin\theta}{J_{Iz}} \\ \\ T = \dfrac{2e^2m^2g(1-\cos\theta)}{J_{Iz}} - mg\sin\theta \end{array}\right.$$

Ainsi :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} N = mg\left(\cos\theta + \dfrac{e^2m\sin\theta}{\frac{1}{3}m(a^2+h^2)}\right) \\ \\ T = mg\left(\dfrac{2e^2m(1-\cos\theta)}{\frac{1}{3}m(a^2+h^2)} - \sin\theta\right) \end{array}\right.}$$

3/ La tartine quitte la table dès lors que $\theta = \theta_0 = \pi/4$. Ainsi, d'après l'expression de la question 1/, on en déduit l'expression de $\dot{\theta}_0$ la vitesse angulaire lorsque la tartine quitte la table :

$$\dot{\theta}_0 = \sqrt{\frac{2emg(1-\cos\frac{\pi}{4})}{J_{Iz}}} = \sqrt{\frac{2emg(\frac{2-\sqrt{2}}{2})}{\frac{1}{3}m(a^2+h^2)}} = \sqrt{\frac{6eg(\frac{2-\sqrt{2}}{2})}{(a^2+h^2)}}$$

4/ $\dot{\theta}$ est constant au cours de la chute et vaut $\dot{\theta}_0$, la tartine continue sa rotation à vitesse constante autour du point G. Celui-ci est en mouvement rectiligne dans la mesure où la seule action que la tartine subit est son poids et on considèrera que la vitesse initiale du point G est trop faible pour être considérée, on la prendra donc nulle.
La tartine est donc en chute libre verticale de vitesse initiale nulle et l'équation du mouvement de G est donc la suivante :

$$x(t) = -g\frac{t^2}{2}$$

Pour une hauteur de table h_T, la durée de chute Δt est donnée par :

$$\boxed{\Delta t = \sqrt{\frac{2h_T}{g}}}$$

5/ On considère une table d'une hauteur d'environ 1 m et une tartine d'environ 50 g, de longueur $L = 10$ cm et d'épaisseur $h = 1$ cm.

La loi d'évolution de l'angle θ est la suivante :

$$\theta(t) = \dot{\theta}_0 t + \theta_0$$

L'angle dont a tourné la tartine quand elle heurte le sol est donc donné par :

$$\theta_s = \dot{\theta}_0\sqrt{\frac{2h_T}{g}} + \theta_0$$

L'application numérique donne :

$$\dot{\theta}_0 = 3,9 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad \theta_s = 3,4 \text{ rad}$$

Cet angle est légèrement supérieur à π, la tartine a donc fait un demi-tour et tombe du côté beurré.

On peut remarquer que ce résultat ne dépend pas de la masse de l'objet. Si vous faites le test avec votre téléphone, ça fonctionne toujours !