Chapitre 15
DM 15

Spectromètre de masse

Un exercice classique sur les particules chargées. Un peu plus long que d'ordinaire, il permet de bien travailler les mouvements dans $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

1/ Les cations sont chargés positivement : ils doivent être soumis à une force $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E}$.

Elle doit être dirigée suivant $\overrightarrow{O_1O_2}$ tout comme $\overrightarrow{E}$. Or, $\overrightarrow{E}$ est dirigé vers les potentiels décroissants : on doit avoir $V_{G_1} > V_{G_2}$ donc :

$$\boxed{U = V_{G_1} - V_{G_2} > 0}$$

2/ On applique le théorème de l'énergie mécanique sous forme intégrale au cation dans le référentiel attaché au spectromètre supposé galiléen entre O_1 et O_2. La force de Lorentz étant conservative et le poids négligeable devant elle, on a :

$$\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p = 0$$

Or, on sait que l'énergie potentielle due à l'action d'un champ électrique sur une particule de charge q s'exprime $E_p = qV$ où V est le potentiel électrique au point où se situe la particule. On obtient donc :

$$eV_{G_1} = \frac{1}{2}mv^2 + eV_{G_2} \quad \text{le cation entrant avec une vitesse nulle}$$

Ainsi :

$$v^2 = 2\frac{eU}{m} \quad \text{soit} \quad \boxed{u_1 = \sqrt{\frac{2eU}{m_1}}} \quad \text{et} \quad \boxed{u_2 = \sqrt{\frac{2eU}{m_2}}}$$

3/ On a vu précédemment que $\Delta E_c = -\Delta E_p = eU = 15,0$ keV Ainsi :

$$U = 15,0 \text{ kV}$$

Or, $m = M/\mathcal{N}_A$, on obtient ainsi :

$$\boxed{u_1 = 111 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}} \quad \text{et} \quad \boxed{u_2 = 110 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}}$$

4/ La force magnétique de Lorentz s'exprime : $\overrightarrow{F} = e\vec{v} \wedge \overrightarrow{B}$ dans le cas de cations de charge e.
Or, $\overrightarrow{F}$ est orientée vers le centre du cercle, soit M. e étant positif, il faut que $\vec{v} \wedge \overrightarrow{B}$ soit orienté vers le bas. À l'aide de la règle de la main droite, on en déduit que $\overrightarrow{B}$ doit être orienté vers nous, soit comme sur le schéma.

5/ Le mouvement est circulaire par hypothèse et la trajectoire se fait dans le plan orthogonal à $\overrightarrow{B}$.

De plus, la puissance de la force magnétique de Lorentz est donnée par $\mathscr{P}_{mag} = e(\vec{v} \wedge \overrightarrow{B}).\vec{v} = 0$ car $\vec{v} \wedge \overrightarrow{B}$ est orthogonal à $\vec{v}$ par propriété du produit vectoriel. On en déduit donc que la force magnétique de Lorentz ne travaille pas, elle n'influe pas sur la norme de la vitesse du cation.

Le mouvement est donc **uniforme**.

6/ Le mouvement étant circulaire, utilisons un repère cylindrique de base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ centré en le centre du cercle décrit par le cation. Les expressions de la vitesse et de l'accélération dans ce repère sont les suivantes :

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{a} = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_r$$

où $v = R\dot{\theta}$.
Appliquons le principe fondamental de la dynamique au cation dans le référentiel du spectromètre :

$$-m\frac{v^2}{R}\vec{e}_r = e\vec{v} \wedge \overrightarrow{B} = ev\vec{e}_\theta \wedge B\vec{e}_z = evB\vec{e}_r$$

Prenons la norme de cette expression :

$$mv^2/R = evB \quad \text{soit} \quad R = \frac{mv}{eB}$$

On obtient ainsi les rayons suivants :

$$\boxed{R_1 = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m_1U}{e}}} \quad \text{et} \quad \boxed{R_1 = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m_1U}{e}}}$$

7/ On veut $D = 2R$. Considérons le faisceau de cations de l'isotope 235 :

$$\boxed{B = \frac{2}{D}\sqrt{\frac{2m_1U}{e}}}$$

L'application numérique donne : $B = 0,576$ T

8/ L'application numérique pour R_2 donne :

$$R_2 = \boxed{473 \text{ mm}}$$

Ainsi, $2R_2 - D = 6$ mm > 4 mm

Le décalage entre les deux faisceaux au niveau du collecteur est plus important que la largeur de la fente, ce qui permet bien la séparation isotopique.

9/ Par définition : $I = \dfrac{q}{\Delta t}$ avec q la charge émise et $\Delta t = 365 \times 24 \times 3600$ la durée de fonctionnement.

Ainsi, sur une année, la charge émise vaut :

$$q = I\Delta t$$

On en déduit ainsi le nombre d'ions envoyés sur le collecteur en un an :

$$N = \frac{q}{e} = \frac{I\Delta t}{e}$$

Or, seulement 0,7% de l'uranium est l'isotope 235, on a donc N_{235} le nombre de cations de cet isotope émis en un an :

$$N_{235} = 0,007 \times N = 0,007 \times \frac{I\Delta t}{e}$$

On en déduit donc n_{235} la quantité de matière d'isotopes 235 isolés :

$$n_{235} = \frac{N_{235}}{\mathcal{N}_A} = 0,007\frac{I\Delta t}{\mathcal{N}_A e}$$

La masse d'isotope 235 que le Calutron peut isoler en une année est donc donnée par :

$$\boxed{m = \frac{n_{235}}{M} = 0,007\frac{I\Delta t}{\mathcal{N}_A e M}}$$

Soit, après application numérique : $m = 54$ g, c'est **pas énorme...**