DM 11

Chapitre 11

Antenne

Cet exercice vous amène à suivre une résolution de résonance assez classique. Essayez de bien être efficaces dans la résolution ET dans la rédaction.

1/ Le générateur délivre une tension sinusoïdale, tous les raisonnements qui suivent peuvent donc être menés en utilisant des grandeurs complexes.
Les trois dipôles sont en parallèle, leurs admittances s'ajoutent. On obtient donc l'expression de l'admittance équivalente à l'association :

$$\underline{Y}_{\text{éq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L} + \mathrm{j}\omega C = \frac{R + \mathrm{j}\omega L - \omega^2 RLC}{\mathrm{j}\omega RL}$$

L'impédance de l'association équivalente à l'antenne est donc l'inverse de cette admittance. :

$$\boxed{\underline{Z}_{\text{éq}} = R\frac{\mathrm{j}\omega\frac{L}{R}}{1 + \mathrm{j}\omega\frac{L}{R} - \omega^2 LC}}$$

On préférera mettre les impédances sous une forme ne faisant apparaître que des grandeurs adimensionnées.

2/ L'association équivalente à l'antenne est décrite par la relation suivante :

$$\underline{u}(t) = \underline{Z}_{\text{éq}}\underline{i}(t)$$

On en déduit donc :

$$\underline{u}(t) = R\frac{\mathrm{j}\omega\frac{L}{R}}{1 + \mathrm{j}\omega\frac{L}{R} - \omega^2 LC}\underline{i}(t)$$

Or, $\underline{i}(t) = I_0 e^{\mathrm{j}\omega t}$. Posons $\underline{U}$ l'amplitude complexe de $\underline{u}$. On peut alors exprimer cette amplitude complexe ainsi :

$$\boxed{\underline{U} = R\frac{\mathrm{j}\omega\frac{L}{R}}{1 + \mathrm{j}\omega\frac{L}{R} - \omega^2 LC}I_0}$$

3/ On pose pour cela $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$ et on obtient la relation précédente mise sous forme canonique :

$$\underline{U} = R\frac{\mathrm{j}\frac{\omega}{Q\omega_0}}{1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}I_0$$

L'évolution de la tension aux bornes de l'antenne en fonction de l'intensité générée par le générateur de courant a la même forme que l'évolution de l'intensité dans un circuit RLC série. Dans ce cas, la résonance a toujours lieu pour une pulsation d'excitation égale à la pulsation propre $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$

4/ Cf cours pour la représentation.

5/ On sait que la largeur du pic de résonance $\Delta\omega$ est donnée par :

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

Cette largeur correspond à la bande de pulsation sur laquelle, la valeur de l'amplitude de la tension est supérieure à sa valeur maximale divisée par $\sqrt{2}$.

On peut ainsi remplacer Q et ω_0 par leurs expressions en fonction des données :

$$\Delta\omega = \frac{1/\sqrt{LC}}{R\sqrt{\frac{L}{C}}} = \frac{L}{R}$$

Numériquement, on obtient alors :

$$\boxed{\Delta\omega = 3,1.10^9 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}$$

6/ Le déphasage entre u et i est donné par :

$$\varphi = \arg\left(\frac{\underline{u}}{\underline{i}}\right) = \arg(\underline{Z}_{\text{éq}}) = \arg(RI_0) + \arg\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{Q\omega_0}\right) - \arg\left(1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)$$

L'argument d'un réel est nul et celui d'un imaginaire pur vaut $\pi/2$ donc :

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\frac{\omega}{Q\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right)$$

Posons $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, on obtient donc :

$$\varphi(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\frac{x}{Q}}{1 - x^2}\right)$$

$x \mapsto x$ est croissante tout comme $x \mapsto \dfrac{1}{1 - x^2}$ sur $\mathbb{R}^+$, donc l'argument de l'arctan est une fonction croissante de x. L'arctan étant une fonction croissante, on en déduit donc que φ décroit avec la pulsation réduite.